MATEMÁTICA NAS SÉRIES INICIAIS - PARTE I

NÚMEROS NATURAIS - CONTEÚDO E FORMA

REDE NACIONAL DE FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Presidente da República
Luiz Inácio Lula da Silva

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO - MEC

Ministro da Educação
Fernando Haddad

Secretário de Educação Básica
Francisco das Chagas Fernandes

Diretoria do Departamento de Políticas de Educação Infantil e Ensino Fundamental
Jeanete Beauchamp

Coordenadora Geral de Políticas de Formação
Roberta de Oliveira

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO - UFRJ

Reitor
Aloísio Teixeira

LIMC - LABORATÓRIO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO EM ENSINO DE MATEMÁTICA E DAS CIÊNCIAS

Coordenador
Luiz Carlos Guimarães

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO - MEC
Rede Nacional de Formação Continuada

LIMC

MATEMÁTICA NAS SÉRIES INICIAIS - PARTE I

NÚMEROS NATURAIS - CONTEÚDO E FORMA

Mônica Cerbella Freire Mandarino

Elizabeth Belfort

Rio de Janeiro
2006

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

M271 Mandarino, Mônica Cerbella Freire.
Números naturais : conteúdo e forma / Mônica Cerbella Freire Mandarino, Elizabeth Belfort. - Rio de Janeiro : Ministério da Educação : Universidade Federal do Rio de Janeiro, Laboratorio de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciencias, 2005.
219 p. : il. color. ; 30 cm. - (Matemáticas nas séries iniciais ; pt. 1)
.
Bibliografia: p. 213-219.
ISBN 85-

1. Professores - Formação. 2. Prática de ensino. 3. Matemática. I. Belfort, Elizabeth. II. Brasil. Ministério da Educação. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências. III. Título. IV. Série.

CDD 370.71

Colaboradoras
Ana Teresa de Carvalho Correa de Oliveira
Flavia Renata Franco Lopes Coelho
Maria Imaculada Chao Cabanas

Revisão dos Textos
Carmen Irene Correia de Oliveira

Capa
Duplo Design

Ilustrações
Leonardo Cordeiro da Rocha

Projeto Gráfico e Editoração
Duplo Design

Impressão
Rotapress Gráfica e Editora

Endereço LIMC
Endereço eletrônico: limc.ufrj@gmail.com
Contato telefônico: (0 xx 21) 2598 9401 (Júlia ou Maria Lucia)

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Caro colega

Ao elaborar esta obra, tínhamos em mente três perguntas: Por que estudar Matemática? O que é relevante nesse estudo? Como ensinar Matemática?

Durante muito tempo, a Matemática foi vista como um edifício que, construído aos poucos, é cheio de pré-requisitos. Esta postura levou a um ensino sem preocupação pedagógica e sem levar em conta o desenvolvimento cognitivo, os interesses e a motivação dos alunos. Nesta concepção, cabia aos alunos memorizar definições, repetir procedimentos e resolver problemas típicos, na maioria das vezes, artificiais.

A matemática escolar sempre foi considerada a disciplina responsável pelo desenvolvimento do raciocínio lógico e pela disciplina do pensamento.

Neste livro, partimos de outras concepções. Por isso mesmo, a própria estrutura deste trabalho é bem diferente da de outros materiais dedicados à formação continuada de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Esperamos contagiar você com nossas esperanças de um ensino de matemática mais eficiente, mais prazeroso para os alunos e que forneça a nós, professores, opções seguras e testadas para trilhar uma renovação sem muitos sobressaltos e incertezas.

Assim, este livro foi pensado como uma conversa entre colegas de profissão que têm muito a trocar. As aulas apresentam textos para discussão, diversos exemplos e sugestões de atividades e experiências testadas por professores e pesquisadores que encontramos em nosso caminho profissional, em diferentes escolas e com os mais variados tipos de alunos.

Para iniciar nossas conversas, gostaríamos de partilhar com você algumas de nossas concepções.

Qual o papel da matemática escolar?

Em qualquer área de atuação, o cidadão vai se deparar com situações nas quais ele necessita *compreender*, *utilizar* e *aperfeiçoar* conceitos e procedimentos matemáticos.

Acreditamos que a Matemática é parte importante, essencial mesmo, da bagagem intelectual de todo cidadão que deseja ter uma participação crítica na sociedade. Num mundo cada vez mais complexo, é preciso estimular e desenvolver habilidades que permitam resolver problemas, lidar com informações numéricas, interpretando-as critica e independentemente, para, a partir delas, tomar decisões, fazer inferências, opinar sobre temas que as envolvem, desenvolvendo a capacidade de comunicação e de trabalho coletivo.

A matemática escolar, além de cumprir um papel formativo, ajudando a estruturar o pensamento e o raciocínio lógico, é uma ferramenta, já que é linguagem e instrumento de expressão para outras áreas do conhecimento, é útil e necessária em muitas tarefas da vida cotidiana.

O que ensinar?

Nossa ênfase está na formação de conceitos e não na mecanização de regras e procedimentos.

Acreditamos que a Matemática deva ser ensinada de maneira contextualizada, levando em conta os interesses dos alunos e tendo suas aplicações claramente mostradas. Por isso, selecionamos dos conteúdos tradicionalmente ensinados neste nível de escolaridade e relacionados com a área de que trata este curso – números naturais e suas operações –, o que é realmente relevante. Outro aspecto importante, relacionado com nossas opções de seleção e de abordagem, é que em nossa proposta as conceituações partam sempre de atividades e aplicações que fazem parte da realidade e dos interesses infantis. Situações que motivem a construção dos conceitos e procedimentos formadores do pensamento numérico e matemático.

Para a formação integral da criança, em especial nas séries iniciais, é preciso estimular o estabelecimento de analogias, conexões, reconhecimento de regularidades e generalizações.

Como as necessidades de utilização de conteúdos e técnicas, na vida real, não se apresentam de forma isolada, algumas das atividades e problemas apresentados incentivam a articulação entre conteúdos matemáticos e conteúdos de outras disciplinas.

Defendemos o respeito ao desenvolvimento cognitivo dos alunos. As abstrações e nomenclaturas devem ser introduzidas aos poucos, juntamente com uma boa familiarização do pensamento numérico, tornando os alunos capazes de: avaliar ordem de grandeza e fazer estimativa; efetuar cálculos mentais; reconhecer padrões; criar suas próprias estratégias e testá-las; comunicar-se defendendo suas idéias e opiniões. Estas e outras habilidades necessitam de investimento de sua parte; por isso, pretendemos incentivá-los a ajudar seus alunos a desenvolvê-las.

Para resolver um problema, é preciso, além de elaborar boas estratégias, saber efetuar as operações necessárias com rapidez e correção.

Entretanto, os alunos devem também perceber, que em Matemática algumas habilidades técnicas devem ser dominadas. Da mesma forma, a linguagem simbólica da Matemática, com suas convenções, precisa ser utilizada adequadamente. Aos poucos, na prática de resolver problemas, o domínio das técnicas e da linguagem será incorporado, sem necessidade de realizar treinamentos áridos, como um fim em si mesmo. Assim, nem todo problema será contextualizado fora da Matemática – você vai notar uma opção clara por incluir problemas que se constituem em desafios de crescimento e cujo contexto é a própria Matemática.

Como ensinar?

É indispensável que o aluno seja agente ativo da construção de seu próprio conhecimento e, por isso, valorizamos a metodologia de resolução de problemas. No entanto, não descartamos a necessidade de sistematizar e consolidar os conhecimentos adquiridos por meio de atividades e exercícios, que precisam ir além daqueles de aplicação imediata e treino.

Você terá oportunidade de verificar durante este curso que o papel do professor é tão ativo quanto o do aluno – apenas é diferente do modelo estereotipado do professor que despeja conhecimentos sobre alunos desinteressados.

Para favorecer a construção do conhecimento matemático autônomo e produtivo, por parte dos alunos, é necessário incentivar a experimentação, valorizar as estratégias por eles escolhidas para resolver um problema, incentivar que tentem expô-las, por escrito ou oralmente. Ou seja, a sala de aula deve proporcionar momentos de produção e reflexão individual para os alunos. Como a capacidade de trabalhar em grupo é cada vez mais importante na sociedade moderna, esta prática é bastante incentivada durante todo o curso. Isso não significa apenas a opção de quatro ou cinco alunos trabalhando juntos, embora incentivemos esta idéia. Uma dupla também é um grupo – que tem condições de aprofundar mais a discussão do que um grupo maior. A turma toda também é um grupo, que precisa de momentos para compartilhar seus saberes, trocar experiências e negociar idéias, linguagem e técnicas, sistematizando os conhecimentos.

Acreditamos que a avaliação não deve se limitar à conferência de resultados. Avaliar é acompanhar o processo de ensino e de aprendizagem, envolve aluno e professor. Visa auxiliar a identificação de dificuldades para que o professor possa propor novas experiências que contribuam para a superação de etapas. Hoje, com a grande heterogeneidade dos alunos, é essencial levar em conta as diferenças, por vezes profundas, entre eles e entre diferentes salas de aula. Esta visão de avaliação está especialmente baseada em uma nova abordagem do erro. É fundamental também lembrar que quase sempre um problema admite vários encaminhamentos e formas de resolução. É importante discutir e valorizar diferentes soluções propostas pelos alunos, que devem exercitar a habilidade de expor e defender seus argumentos. Para reforçar a importância que damos a esta perspectiva, criamos uma seção intitulada *"Escute seu aluno"* ao final de cada aula. Nesta seção, apresentamos atividades realizadas por alunos dos anos iniciais e discutimos seus erros e acertos. Esperamos, com isso, estimular uma mudança de seu olhar sobre a produção de seus alunos.

Como avaliar a aprendizagem dos alunos?

A reflexão do professor sobre o processo de resolução, desenvolvido pelo aluno, que levou ao erro, muitas vezes, facilita identificar onde se dá o "nó" na construção do conhecimento, permitindo planejar ações para intervir no processo.

A meta mais importante deste curso é estimular a reflexão, compreensão de conceitos, autoconfiança e liberdade criativa. Nosso desejo é que você possa adaptar as propostas por nós selecionadas e apresentadas ao projeto pedagógico de sua escola, à realidade de sua turma, e da comunidade. Você será estimulado nas *"Atividades propostas para o professor"*, ao final de cada aula, a repensar sua prática, a selecionar material para discutir com outros cursistas – como o material de outros professores (e seus alunos) que gentilmente têm nos abastecido com as experiências que apresentamos para você neste livro. Tudo isso depende de você, professor, e do conhecimento que você tem da Matemática e da turma com a qual está trabalhando.

O que esperamos de você?

Lembramos que o exercício de experimentação será o principal investimento em seu próprio aperfeiçoamento.

Para finalizar esta nossa primeira conversa, vale dizer que as autoras aprenderam muito nas discussões que definiram o formato final do livro que agora lhe chega às mãos. As colaborações de Flávia Renata, para a seleção e análise preliminar do rico material da seção *"Escute seu aluno"*, e de Ana Teresa, nas reflexões teóricas que fecham o livro, foram inestimáveis, assim como a consultoria de Inmaculada, trazendo idéias de atividades para o professor e ricas contribuições para suas soluções.

Esperamos que esta obra possa ser útil ao seu trabalho e que possa contribuir, de forma significativa, para o seu desenvolvimento profissional.

Bom trabalho!

As autoras

Beth e Mônica

AULA 1

UMA BREVE HISTÓRIA DOS NÚMEROS

OBJETIVOS DESTA AULA

• Apresentar, parte da evolução histórica da representação numérica, com o intuito de ampliar os conhecimentos do professor.

• Identificar, no processo histórico, as diferentes etapas que precederam a aquisição do sistema decimal de numeração.

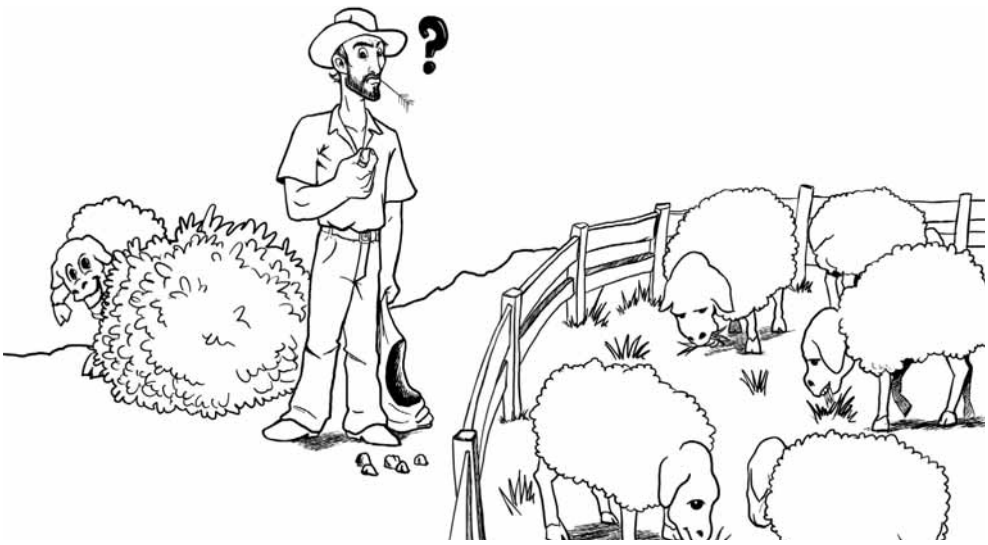
• Estabelecer um paralelo entre as dificuldades na aquisição do registro numérico pelos alunos e aquelas registradas pela história.

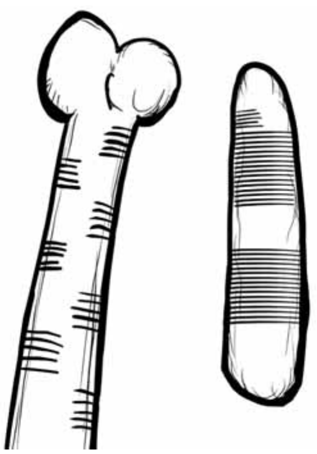
• Identificar, por meio de atividades em outros sistemas, as dificuldades na aquisição de um sistema de representação numérica.

TEXTO PARA LEITURA

Como você deve ter observado pela leitura dos objetivos, procuramos, neste primeiro momento, mostrar a complexidade do sistema decimal de numeração, que é resultado de uma longa evolução histórica. É muito importante você refletir sobre este processo. Neste sentido, esta é uma aula que visa aumentar seus conhecimentos sobre o tema; ela não foi pensada para ser adaptada para a sua sala de aula, como as que se seguirão. Ao ler esta aula, tenha sempre em mente que os sentimentos de estranheza que você vai, diversas vezes, vivenciar são muito similares aos que seus alunos enfrentam ao serem apresentados ao nosso registro numérico que, para quem já está habituado, parece tão simples!

Ninguém sabe, exatamente, quando foram inventados os primeiros registros numéricos; sabe-se, porém, que povos pré-históricos, antes mesmo de possuírem uma linguagem escrita, grafavam o resultado de suas contagens, ou então grafavam o próprio ato de contagem.





Não sabemos ao certo, mas podemos imaginar estórias sobre o uso primitivo de contagens – anteriores até mesmo aos primeiros símbolos grafados. Imagine um pastor de ovelhas, preocupado em não perder nenhuma ovelha de seu rebanho. Assim, ao soltá-las no pasto pela manhã, ele colocava uma pedrinha em um saco para cada ovelha que saía do cercado. Ao anoitecer, ao recolher os animais, era só retirar uma pedra para cada ovelha reconduzida ao cercado. Se não sobrasse nenhuma pedra, todas as ovelhas estariam a salvo. Caso contrário, era hora de sair a procura de ovelhas desgarradas. Cada pedra restante no saco correspondia a uma ovelha que não havia retornado.

Se tais pastores realmente existiram, ou se são apenas lendas, uma idéia muito importante em Matemática foi contada: associar uma pedra a cada ovelha, permitia ao pastor "conferir" seu rebanho e tomar providências, quando necessárias, para recuperar animais perdidos.

Como a idéia de passar o dia carregando um saco de pedras não é das mais agradáveis, seria interessante trocá-las por algo mais leve. Talvez por isso tenha surgido outra boa idéia – pensar que três ovelhas poderiam ser representadas por um registro gráfico, como **I I I**. Além disso, este mesmo registro serviria para três pássaros, três pedras ou qualquer outro conjunto de três objetos. Usar um mesmo registro para uma mesma quantidade de coisas diferentes (uma construção abstrata) foi um grande avanço, mas o homem se deparou com a necessidade de registrar quantidades cada vez maiores – um novo desafio, pois suas formas de registro eram limitadas (pedras, entalhes, partes do corpo humano, riscos, desenhos, etc.).

Surgiu, então, um difícil problema a ser resolvido pelo ser humano: como designar (concreta, oralmente ou, mais tarde, por escrito) *números cada vez maiores, usando poucos símbolos?*

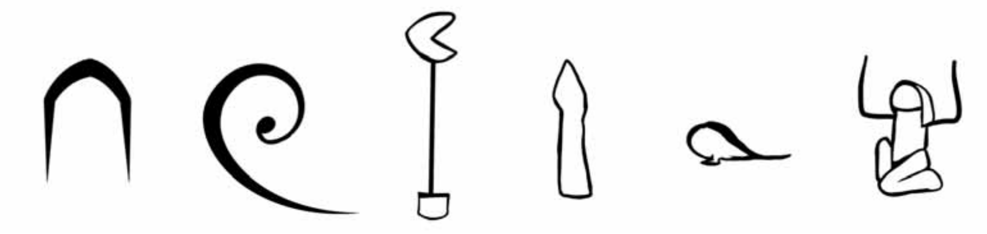
Esta pequena introdução da história dos números já nos faz imaginar que os homens passaram por várias etapas e dificuldades no desenvolvimento da Matemática. Sabe-se também que, nem sempre, as dificuldades e os impasses foram contornados ou solucionados com eficiência e rapidez. Nesta aula, você vai conhecer algumas características, propriedades e notações de outros sistemas de numeração já utilizados pela humanidade e verificar que o sistema que usamos hoje é o resultado de uma longa evolução.

Os egípcios

A civilização egípcia, 3.000 anos antes de Cristo, já se encontrava bastante avançada. Os egípcios possuíam cidades urbanizadas, se empenhavam em conquistar novas terras e, por necessidades administrativas e comerciais, tornou-se importante haver registros duradouros que mostrassem a quantidade de animais abatidos ou o número de barcos carregando trigo, por exemplo.

Os egípcios usavam agrupamentos de base 10, como hoje em dia. Assim, representavam números até nove pela repetição de traços verticais e símbolos para o dez e suas potências (cem, mil, etc.).

I	II	III	IIII	IIIII	IIIIII	IIIIIII	IIIIIIII	IIIIIIIII
1	2	3	4	5	6	7	8	9



10 100 1 000 10 000 100 000 1 000 000

Um sistema de numeração como o egípcio é chamado de aditivo. Para se saber o valor representado, simplesmente adicionamos os valores dos símbolos utilizados.

O símbolo para a dezena é semelhante a uma ferradura, a centena é representada por uma espiral, o milhar é uma flor de lotus estilizada. Para a dezena de milhar usavam um dedo erguido, ligeiramente inclinado, a centena de milhar lembra um girino ou uma rã e o milhão, um homem de joelhos com os braços para cima, parecendo maravilhado com quantidade tão grande.

Como não tinham um sistema posicional, não precisavam do zero e o número 12, por exemplo, podia ser escrito como ∩II ou II ∩.

Os babilônios

Os babilônios (por volta de 1900 a.C.) utilizavam um sistema de numeração baseado em grupos de dez e de sessenta. Não se sabe ao certo o motivo para escolha da base sessenta. Sabe-se, no entanto, que a base sexagesimal trazia algumas vantagens para os astrônomos (sendo esta uma das hipóteses para seu uso, considerando o desenvolvimento deste saber entre este povo). No entanto, se agrupassem apenas de 60 em 60, necessitariam de muitas palavras e símbolos (59, sem contar o zero). Isto, além de trabalhoso, dificultaria muito os cálculos.

Para resolver o problema, matemáticos e astrônomos da Babilônia (no período de 1790 a 1750 a.C., aproximadamente) criaram um sistema de numeração, no qual passou-se a usar um princípio de posição. Esta solução, que hoje nos parece tão simples, levou milênios para ser adotada pela humanidade.

Neste sistema posicional, números de 1 a 59 ocupavam a ordem das unidades simples. A segunda ordem era ocupada para representar números a partir de 60, a terceira ordem era ocupada a partir de $60 \times 60 = 60^2 = 3600$, e assim por diante. Mas, como dissemos anteriormente, este sistema usava também grupamentos de 10 em 10. Desta forma, eram empregados apenas dois símbolos:

1 10

Os números de 1 a 59 eram representados de forma aditiva:

19 56

Para números maiores que 59, a escrita se tornava posicional. Veja, por exemplo, como eles escreviam o número 68:

$68 = 1 \times 60 + 8$

Para reforçar o uso do princípio posicional babilônico, observe e tente compreender mais alguns exemplos:

$1 \times 60 + 10 = 70$ 11 $2 \times 60 + 35 = 155$ $12 \times 60 + 30 = 750$

Ainda hoje convivemos com a base sexagesimal para representar frações da hora e para medir ângulos (frações de 1 grau , também chamadas de minutos e segundos).

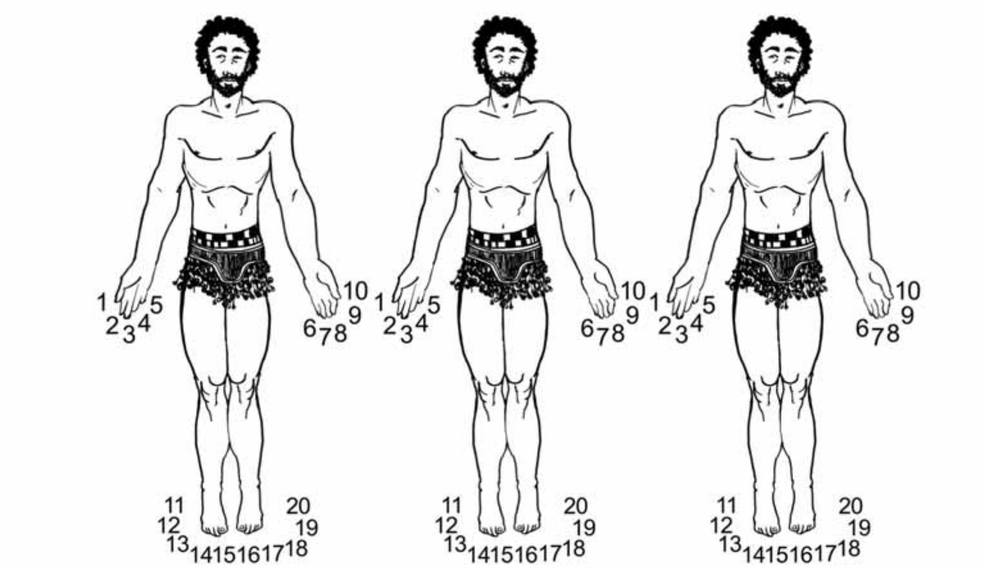
Os maias

Curiosidades:

- Os banda da África Central exprimem o número 20, até hoje, como "pendurar um homem".
- Em um dialeto maia a expressão *hun uinic* significa uma vintena e também um homem.

Os Maias (e também os Astecas), na América Central pré-colombiana, adotavam uma base vintesimal, formando grupos de 20 e suas potências. A contagem na base 20 também foi utilizada por povos da África Central e pelos esquimós da Groenlândia. Possivelmente, o uso da base 20 foi inspirado no fato de termos 20 dedos (5 em cada mão e 5 em cada pé) e é comum que a leitura dos números nas diferentes línguas destes povos se associe a este fato (ver nota).

Dentre as culturas pré-colombianas, a civilização maia foi a mais desenvolvida. Os maias elaboraram estudos astronômicos muito precisos (superiores aos feitos na Europa da mesma época) e se destacaram também na Matemática, utilizando a notação posicional e uma representação para o zero.



• Os esquimós da Groenlândia empregavam a expressão "do terceiro homem, três sobre o primeiro pé" para o número 53.

Para números até 19, os maias usavam apenas pontos e traços em um sistema aditivo.

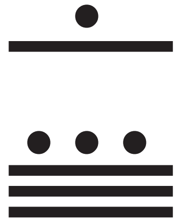
•	• •	• • •	• • • •	—
1	2	3	4	5

• —	• • —	• • • —	• • • • —	— —
6	7	8	9	10

• — —	• • — —	• • • — —	• • • • — —	— — —
11	12	13	14	15

• — — —	• • — — —	• • • — — —	• • • • — — —	
16	17	18	19	

A partir de vinte, os mesmos símbolos voltavam a ser usados, mas com o princípio da posição. Escreviam colunas de símbolos, que eram lidos de baixo para cima. Assim, a figura ao lado representa seis grupos de vinte mais dezoito unidades, ou seja, o número que hoje representamos como 138.



6 x 20 + 18 = 138

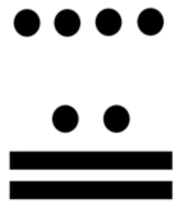
Observe que, na base 20, números até 19 formam a primeira ordem, números de 20 a 399 ($20^2 - 1$) formam a segunda ordem, quantidades de 400 a 7999 ($20^3 - 1$) formam a terceira ordem, e assim por diante.

Além disso, após agrupar de 20 em 20, pode acontecer de alguma ordem ficar vazia, como é o caso do número

1612 = 1600 + 12 = **4** x 20^2 + **0** x 20 + **12**.

Para resolver este problema, foi preciso criar um símbolo para ocupar ordens vazias e, por isso, dizemos que os maias inventaram o zero. O símbolo usado era uma espécie de concha ou casinha de caracol:  . Com ele, em um sistema de base 20, é possível diferenciar, por exemplo, 1612 de 92, como mostramos a seguir:

$4 \times 20^2 + 0 \times 20 + 12 = 1612$

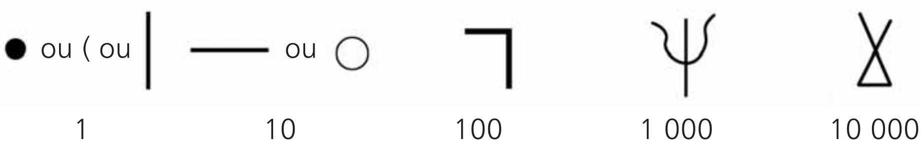


$4 \times 20 + 12 = 92$

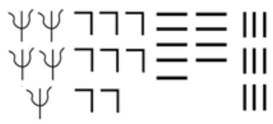
Os gregos

Minóica – do nome do legendário rei Minos, primeiro soberano da ilha de Creta, segundo a mitologia grega.

Onze ou doze séculos depois dos egípcios, aproximadamente entre 2200 e 1400 a.C., na ilha de Creta, a chamada civilização minóica apresentava um forte comércio e um quadro social e político bem desenvolvido (construíam palácios fortificados, fabricavam jóias, armas, etc.). São conhecidas pelo menos três formas de registro de numeração ao longo da história cretense, todas de base dez, como a dos egípcios. O sistema de numeração grego tem origem na representação numérica usada em Creta. No tempo de Homero (Grécia antiga - séc. IX-VIII a.C.), os algarismos utilizados eram:

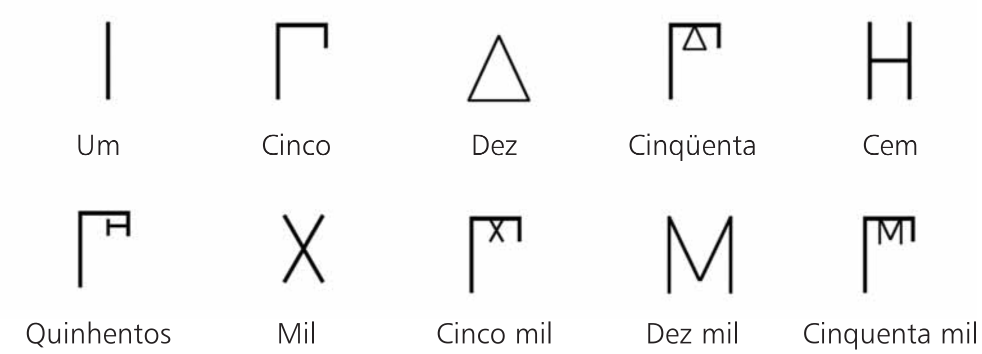


Veja como seria escrito o número 5899



Como nos sistemas de numeração egípcio, o cretense ou grego exigia a repetição de muitos símbolos idênticos para representar até mesmo pequenas quantidades. Na busca de resolver este problema, a partir do século VI a.C., os gregos introduziram símbolos para representar 5 , 500, 5000 e assim por diante.

O número 5899 escrito com o novo sistema:



Tábuas de contar: tabelas com os resultados das operações.

Desta forma, eles criaram um sistema que, além da base 10, usava agrupamentos auxiliares, de cinco em cinco. Apesar de minorar o problema do uso de muitos símbolos repetidos, não houve avanço matemático no uso desta representação, já que este sistema dificultava o registro das operações, levando seus calculistas a criar "*tábuas de contar*".

Os romanos

Os romanos também usaram letras de seu alfabeto para representar os números. Seus símbolos são usados até hoje e, por isso, é muito mais fácil identificá-los. A civilização moderna continua a usar este sistema de numeração para indicar séculos, para designar Papas, numerar capítulos de livros, artigos de leis, e em alguns relógios, etc.

I	**V**	**X**	**L**	**C**	**D**	**M**
1	5	10	50	100	500	1 000

Esta forma de representar números também não exige um símbolo para o zero, pois é muito próxima de um sistema aditivo (como o egípcio). No entanto, no sistema romano vemos surgir uma 'idéia subtrativa', por meio do posicionamento dos símbolos. Sempre que um símbolo da unidade (ou dezena, ou centena) é colocado à frente de um símbolo representando uma das duas quantidades imediatamente superiores a ele, significa que a diferença dessas duas quantidades deve ser considerada. Assim, **IX** é o símbolo para (10 - 1) = 9, enquanto **XI** é o símbolo para (10 + 1) = 11. Os números **XCIX** [(100-10) + (10-1) = 99], e **CDIV** [(500-100) + (5-1) = 404] também são exemplos da idéia subtrativa.

Como ocorria com os gregos, os algarismos romanos tinham a função de permitir um registro escrito de quantidades, evitando a repetição exagerada de um mesmo símbolo, mas não facilitavam os cálculos. Efetuar operações neste sistema era tão difícil, que os romanos usavam ábacos (vamos explorá-los a partir da Aula 3) para os cálculos. Veja um exemplo:

	CCXXXII	232
	CCCCXIII	413
+	MCCXXXI	1231
	MDCCLII	1852
	MMMDCCXXVIII	3728

Os hindus

Os mais antigos registros numéricos hindus que conhecemos hoje datam do século III a.C. Os símbolos já eram independentes, ou seja, não buscavam lembrar visualmente os números correspondentes. Tais símbolos deram origem aos algarismos que utilizamos hoje, chamados de algarismos indo–arábicos.

Por volta do século V d.C., matemáticos e astrônomos da Índia criaram um sistema posicional que suprimia da nomenclatura dos números qualquer menção à base 10 (nomes associados ao 10 e à suas potências). Usavam apenas os nomes dos 9 primeiros números (escritos por extenso) respeitando a ordem de sua seqüência. Assim, o número 5891, por exemplo, era registrado da seguinte forma:

UM. NOVE. OITO. CINCO = 1 + 9 x 10 + 8 x 100 + 5 x 1 000

Este processo levou-os à necessidade de inventar o zero, já que para representar 301, por exemplo, eles precisavam marcar a ausência de uma quantidade para ocupar a segunda ordem. Os sábios hindus recorreram à palavra "vazio" para resolver este problema e assim escreviam:

UM. VAZIO. TRÊS = 301 (1 + 0 x 10 + 3 x 100)

Durante muito tempo, os sábios hindus preferiram usar palavras para o registro dos números, evitando dúvidas causadas pelo uso de várias notações para os dez algarismos. Mesmo com estas restrições, estavam criadas as condições para a construção do sistema de numeração que utilizamos hoje.

Sabe-se que, apesar das dificuldades de realizar operações com números escritos por palavras, os calculistas e matemáticos hindus eram brilhantes. Para realizar as operações, ao invés de operar com pedrinhas ou fichas, como seus contemporâneos ocidentais, logo descobriram as vantagens de sua notação e realizavam os cálculos organizando os algarismos dos números em colunas de mesma ordem, como fazemos hoje.

A disseminação do sistema hindu

Dentre os numerosos matemáticos árabes destaca-se Mohammed Ibn Mussa al-Khowarizmi (aproximadamente 780-850), que escreveu duas obras de importância fundamental na divulgação dos métodos de cálculo e procedimentos algébricos de origem hindu. Seu nome, al-Khowarizmi, dá origem à palavra algarismo, e o nome do livro por ele publicado, al-jabur originou a palavra álgebra.

Os árabes tiveram um papel decisivo na preservação e difusão do sistema de numeração e das técnicas de calcular hindus. Do século VIII ao século XIII, ocorreu um dos períodos mais brilhantes da história da ciência no mundo muçulmano. As conquistas territoriais, associadas ao desejo de converter o mundo ao islamismo, possibilitaram, por meio da tradução da obra de antigos pensadores gregos ocidentais para o árabe, o estudo e o aperfeiçoamento do legado de diversas culturas. Foram também criadas universidades e bibliotecas nos territórios conquistados.

Ao contrário dos árabes, que observaram as vantagens do sistema hindu e admitiram sua superioridade, passando rapidamente a adotá-lo, os cristãos da Europa continuaram usando sistemas bem mais ineficientes durante séculos. Da queda do Império Romano até o final da Idade Média, a "instrução" matemática na Europa se restringia a aulas sobre noções de astronomia e geometria, contar nos dedos e ler algarismos romanos. Isto explica o respeito e a admiração que se tinha pelos calculistas nesta época – uma casta de especialistas que usava um misterioso e complicado método de cálculo, apoiado nos ábacos romanos.

De 1095 a 1270 aproximadamente, as Cruzadas cristãs tentaram impor sua tradição e religião aos "infiéis" do oriente. Na verdade, isto permitiu que os cruzados voltassem para suas terras enriquecidos pela cultura que foram combater. Na mesma época, na Espanha invadida por muçulmanos, muitos europeus buscavam se instruir em matemática, astronomia, ciências naturais e filosofia. Tanto cruzados como sábios de Toledo (Espanha) começam a traduzir para o latim as obras de Euclides, Aristóteles, al-Khowarizmi e outros. O interesse pelos "novos" métodos de cálculo foi alavancado pelo italiano Leonardo de Pisa, que, após visitar a África muçulmana, publicou (em 1202) um tratado com todas as regras de cálculo na representação decimal, além de contribuir para a difusão e o desenvolvimento da álgebra.

Algoristas: defensores do cálculo com pena, por meio do sistema de numeração indiano

Abacistas: defensores do uso do ábaco romano (cálculo por fichas, realizado sobre uma tábua de contar).

A disputa entre "algoristas" e "abacistas" durou ainda muitos séculos. Na verdade, receando a perda do monopólio do ensino (que implicava, também, perda de poder), a poderosa Igreja da Idade Média assumiu a defesa dos abacistas que, por sinal, pertenciam quase todos ao clero. Desse modo, o sistema de numeração indo–arábico permaneceu proibido. Quem utilizava o cálculo moderno o fazia escondido, como se utilizasse um código secreto. A Revolução Francesa (1789) resolveu a polêmica tornando oficial o sistema de numeração e os algoritmos que hoje utilizamos, muito embora os cientistas os tenham adotado muito antes desta data, reconhecendo suas inúmeras vantagens.

Os princípios básicos do nosso sistema de numeração

Nosso sistema de numeração possui como características principais:

• Ser decimal: usamos a base 10.

2348 = 2 unidades de milhar + 3 centenas + 4 dezenas + 8 unidades.

$2348 = 2000 + 300 + 40 + 8.$

$2348 = 2 \times 1000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 8 \times 1.$

$2348 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 8 \times 10^0$.

• Ser posicional – o valor do algarismo depende de sua posição no número.

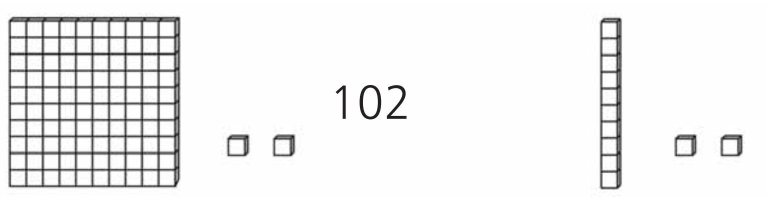
Por exemplo: o algarismo 3 no número 31 representa três dezenas, ou seja, trinta unidades – seu valor é diferente no número 13, no qual ele representa três unidades.

• Usar nove algarismos distintos e independentes de qualquer relação visual com a quantidade que representam: 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9

• Usar um décimo algarismo, o zero, para ocupar ordens vazias.

102 $= 1 \times 10^2 + 0 \times 10 + 2$ – é diferente de – **12** $= 1 \times 10 + 2.$

A partir do material dourado, que você vai conhecer melhor a partir da Aula 3, observe como representar com materiais concretos as quantidade 102 e 12:



Neste sistema, usando apenas dez símbolos, podemos escrever qualquer número, por maior que seja!

PARA SABER MAIS

O excelente livro de George IFRAH, *Os números: a história de uma grande invenção*, publicado em 1992 pela editora Globo de São Paulo, foi a principal fonte de consulta histórica para esta aula. Recomendamos sua leitura a todos os interessados em aprofundar seus conhecimentos sobre este tema.

É importante registrar também que, em trabalhos anteriores, as autoras já haviam abordado a história dos números. De forma natural, essa aula e as atividades para o professor aqui propostas foram influenciadas por estes trabalhos. Mônica Mandarino escreveu a aula 10 do livro *Matemática na Educação*, dos autores Mônica Mandarino, Beatriz Helena Magno e Samuel Jurkiewicz, publicada em 2004 pela Fundação CECIERJ, Rio de Janeiro, que forneceu a base estrutural e didática sobre a qual esta aula foi construída. O Capítulo 1 do Livro *Álgebra para Professores* – vol. 1, de Elizabeth Belfort e Luiz Carlos Guimarães, publicado em 2000 pelo IM-UFRJ, no Rio de Janeiro, também foi consultado e algumas de suas soluções didáticas e exercícios foram revisitados.

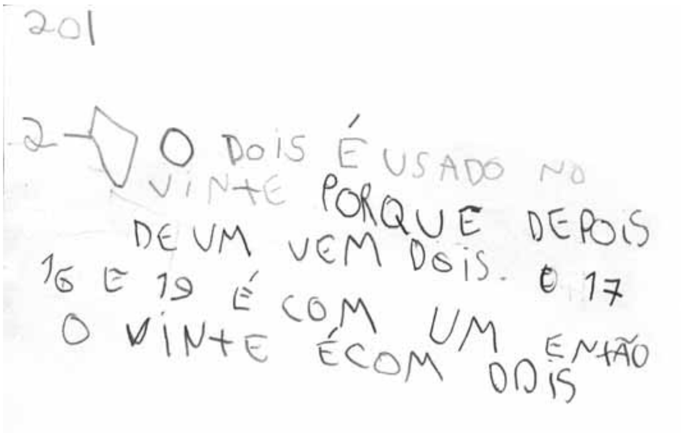
ESCUTE SEU ALUNO

Como se estivessem revivendo partes do processo histórico, alunos que estão sendo apresentados à representação numérica, em geral, vão assimilando a importância do zero e sua utilização correta em etapas. Vejamos alguns exemplos:

Primeira Escuta

Juliana tenta escrever 21, número ditado por sua professora. Veja o resultado e os comentários feitos por ela:

Observe que Juliana não aplica corretamente a notação posicional para escrever o número 21, mas escreve 20 corretamente e é capaz de justificar, em sua linguagem, a importância de usar o dois, comparando o vinte com alguns dos números que estão logo antes dele na seqüência numérica.

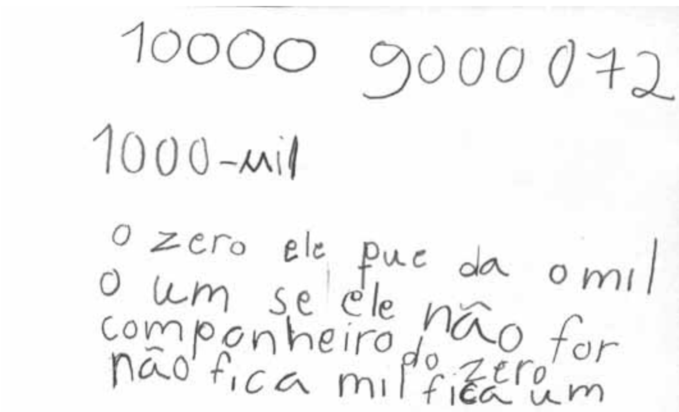


2 - o dois é usado no vinte porque depois de um vem dois. O 17, 16 e 19 é com um, então o vinte é com dois

Embora ela já escreva os números até 20 corretamente, para o vinte e um ela escreve 201 (ou seja, vinte – e um), não transferindo a notação posicional para a escrita desse “novo” número. Este é um momento importante da construção numérica, pois os números anteriores a vinte têm “nomes” (por exemplo: dizemos “quinze” ao invés de “dez e cinco”). Na verdade, a criança entenderá melhor a notação de números como “trinta e quatro” quando perceber que “dezenove” é, na verdade, “dez e nove” (algumas até passam por uma “fase” trocando estes nomes – o que demonstra a compreensão do princípio geral).

Segunda Escuta

A turma de Mariana fez um levantamento das idades de seus familiares. Anotaram as idades, suas explicações sobre os números escritos e levaram

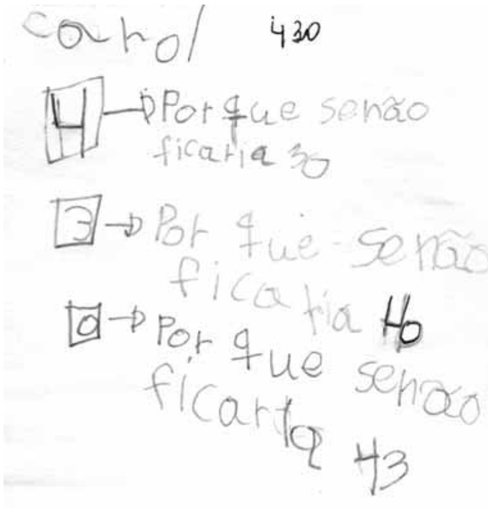


O zero – ele que dá o mil. O um – se ele não for companheiro do zero não fica mil – fica um para a sala de aula. Mariana, no entanto, foi além! Tentou escrever o ano de nascimento de sua mãe, 1972. Veja o resultado e os comentários dela:

Notamos que, para Mariana, a quantidade de zeros ao escrever milhares e centenas ainda não tem muita importância – a questão central para ela parece ser que o zero deve ser “**companheiro**” do 1 para formar o mil (caso contrário, “fica 1”). O mesmo princípio parece ser adotado por Mariana na escrita do novecentos.

No entanto, Mariana escreve 72 corretamente e nos diz que o sete vale setenta, mostrando que é capaz de escrever números de dois algarismos. Mariana está vivendo um processo: uma etapa (números de dois algarismos) já foi conquistada, mas ela ainda não percebeu que regras similares vão ser aplicadas na escrita de números maiores, como os milhares e as centenas.

Terceira Escuta



430

4 por que senão ficaria 30

3 por que senão ficaria 40

0 por que senão ficaria 43

Carol escreve corretamente 430, número ditado por sua professora. Veja sua resposta e seus comentários:

Repare que as informações de Carol sobre a construção do número 430 (que ela escreve corretamente) são muito sucintas. No entanto, ao afirmar que se algum daqueles algarismos não estivesse lá, o número seria outro, demonstra que ela compreende a importância do valor posicional de nosso sistema de numeração.

Quando pedimos que nossos alunos expliquem o que fizeram, podem aparecer respostas econômicas como a de Carol. O uso de respostas curtas pode ter diferentes causas. Primeiramente, o hábito de expor o que se pensa por escrito precisa ser estimulado e desenvolvido. Determinar e sintetizar o que é principal numa argumentação não é nada fácil, nem mesmo para adultos. Apresentar uma argumentação relevante é algo que se adquire com a prática de refletir sobre o trabalho realizado e comunicar estas reflexões.

Para finalizar, é preciso pensar sobre a nossa influência sobre os alunos, quando fazemos anotações e registros matemáticos. Muitas vezes, podemos estar reforçando demais a concisão, com o uso de símbolos e as famosas dicas e regras, sempre muito resumidas.

Quarta Escuta

A professora mostrou registros como os de Juliana e Mariana, (primeira e segunda escutas) a crianças com idéias mais elaboradas sobre o zero, pedindo seu comentário. Veja a resposta de Leo:

> Eu acho que eles não sabem que os números da "família" do mil não tem mais de 4 numeros, que eles escrevem oque eles ouvem.

Chamando de "família do mil" aos números que ocupam até a quarta ordem decimal, Leo demonstra ter clareza de que basta usar um algarismo para cada uma das ordens dizendo "*não tem mais de quatro* _números_" (na verdade, deveria ter dito quatro algarismos).

Observe que o erro de Leo ao chamar os algarismos de um milhar de "números" não compromete sua compreensão do S.D.N. Aliás esse é um erro bastante comum – já que os algarismos que utilizamos são também usados como representação dos números menores que dez. É bastante difícil para uma criança, no processo de construção da representação numérica, compreender exatamente quando deve chamar 7 de "número" e quando deve chamá-lo de "algarismo" (se o professor tivesse apresentado à sua turma o termo *numeral*, Leo teria ainda mais motivos para ficar confuso!)

Mas a questão central desta "escuta" não é o erro de Leo, e sim o fato de que ele está bem avançado no processo de construção do S.D.N. Ele percebe também que os colegas mais novos não têm esse conhecimento e compreende que a escrita de Juliana e Mariana revela que elas escrevem exatamente o que a linguagem oral sugere.

LEMBRE-SE É importante ressaltar que a matemática é uma construção humana, e a principal motivação de seu desenvolvimento são as necessidades práticas e operacionais. Por meio do conhecimento de alguns sistemas de numeração já utilizados durante a história da humanidade, você deve ter observado como foi longo o processo de construção do SND – Sistema de Numeração Decimal, que é aquele que utilizamos.

Esperamos ainda que você tenha refletido sobre como é difícil lidar com um sistema de numeração com o qual não estamos acostumados (nos exercícios, pretendemos apresentar-lhe mais algumas dificuldades). Especialmente, esperamos que estas experiências fortaleçam a idéia de que seu aluno precisa de tempo e de diversas oportunidades de aprendizado para chegar a compreender e utilizar corretamente a forma de registro numérico com a qual estamos tão familiarizados.

É importante ainda ressaltar, que a história deve contribuir para aumentar seu nível de reflexão sobre o significado de uma base de numeração, as vantagens de um sistema posicional e o papel importante do zero na história dos números. Você terá novas oportunidades de explorar estas idéias, sob a ótica da sala de aula, nos próximos capítulos.

ATIVIDADES PARA O PROFESSOR

1) Termine de completar o quadro abaixo para os sistemas de numeração que você conheceu nesta aula.

Sistema	Base	Quantidade de símbolos	Sistema Posicional	Uso do zero	Símbolos		
					1	2	3
Egípicio	10		Não	Não			
Babilônico		2					
Maia							
Grego							
Romano					I	II	III
Hindu							
Moderno							

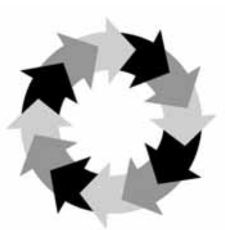
Observe e resuma diferenças e semelhanças entre estes sistemas.

Construa um pequeno texto, destacando as principais dificuldades de uso dos sistemas estudados.

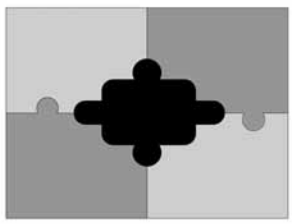
2) Quando associamos a cada carneiro uma pedra, estamos fazendo uma correspondência entre objetos de duas coleções, que é chamada de correspondência 1 a 1 (ou biunívoca).

a) Quais coleções abaixo podem ser postas em correspondência 1 a 1?

Coleção A



Coleção B



Coleção C

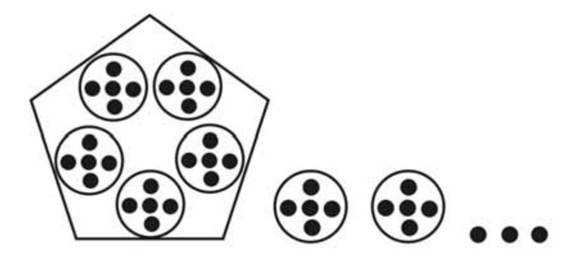
Coleção D

b) Que estratégia você usou para chegar a resposta?

3) O sistema de numeração babilônico era posicional, usava apenas dois símbolos e não representava o zero. Usando o sistema babilônico, represente os números 58, 59, 60, 61 e 62.

4) Observe a figura abaixo, ela representa uma forma de agrupamento.

a) em que base a quantidade de bolinhas (●) a seguir foi agrupada?



b) Substituindo a representação acima convenientemente pelos os símbolos ●, ○ e ⬠ , vemos que a quantidade de bolinhas do item (a) é representada por  . Represente oitenta e duas bolinhas utilizando esta notação.

c) O que significa,  ?

d) Quantos símbolos de cada tipo, no máximo, você poderia utilizar nas representações numéricas deste sistema? Explique sua resposta.

e) Muitas pessoas, para contar pontos, objetos ou passagem de tempo usam traços que formam quadrados riscados pela diagonal  . Que semelhanças você identifica entre este registro de contagem e o anterior?

f) Escrevendo a resposta no nosso sistema de numeração de base 10, quantas bolinhas existem representadas no item (c)?

g) Que estratégia você usou para determinar este número ?

5) *"Faltam dois meses, três semanas e quatro dias para o meu aniversário".* Nesta frase, diversos agrupamentos de quantidades foram usados. Identifique-os.

6) Vimos, nesta aula, que os calculistas eram respeitados e protegidos por instituições de grande poder, como a Igreja Católica na Idade Média. Você acredita que este fato tenha alguma relação com o mito de que *"Matemática é para os bens dotados"*? Faça um pequeno texto explicando sua opinião.

7) Responda com suas palavras:

a) O que é uma base de numeração?

b) Porque o zero foi construído?

c) O que é uma correspondência 1 a 1?

AULA 2

O CONCEITO DE NÚMERO

OBJETIVOS DESTA AULA

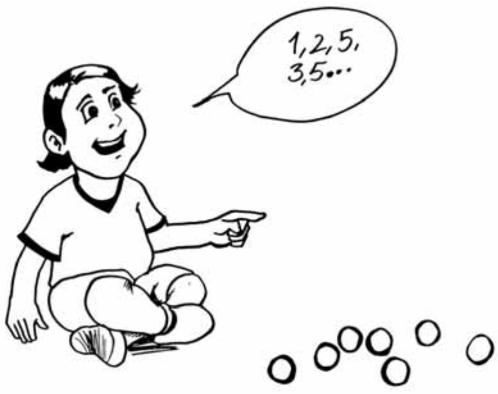
• Identificar as etapas que devem ser exploradas para a construção do número e a comparação de quantidades.

• Propor atividades, para o aluno, que visem à construção do número.

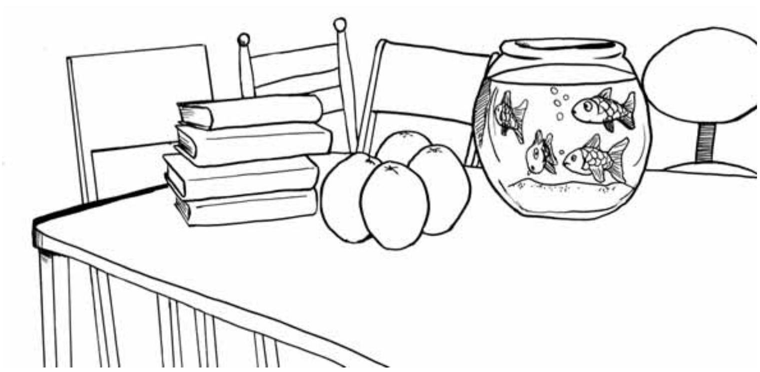
• Discutir a importância de desenvolver atividades paralelas a este processo, voltadas para o desenvolvimento das habilidades de classificação e ordenação.

TEXTO PARA LEITURA

Este é um capítulo importante, pois aborda o processo de aquisição do número, por parte das crianças, o que constitui a base para todo desenvolvimento matemático. Você já observou crianças pequenas contando? Quando contam uma coleção de objetos, "recitam" números, muitas vezes "saltando" alguns e repetindo outros. Se os objetos estão espalhados, elas costumam contar alguns objetos mais de uma vez e deixar de contar outros. Além disso, não é claro para algumas crianças quando devem parar uma contagem. Crianças neste estágio ainda não desenvolveram o conceito de número, mas ele está presente em suas vidas – e isso incentiva suas primeiras tentativas de contagem. Esta "vontade" de contar, as crianças levam para a escola, e deve ser explorada.



Em todo o processo de aprendizagem, o erro demonstra etapas de construção do conhecimento matemático. Você deve valorizar as tentativas de seu aluno, estimulando novas experiências sempre que necessário. O erro evidencia tentativas, etapas da aprendizagem, aproximações necessárias da construção do conhecimento pelo aluno – são depoimentos de seu pensamento. Se formos capazes de compreendê-los, detectando os passos do raciocínio que conduziram ao erro, estaremos nos tornando mais aptos a levar nosso aluno a novas construções. Assim, se partirmos da atividade de contar objetos, a noção correta de número será adquirida pouco a pouco. Para isto, é importante desenvolver diversas propostas, nas quais os alunos possam estabelecer relações entre grupos de objetos. Por exemplo: se há três livros, três lápis e três borrachas sobre uma mesa, o que vemos são objetos: livros, lápis e borrachas, e não o "três". A quantidade três é percebida como uma característica comum a estes grupos de objetos.



Quando dizemos que um objeto que nunca vimos antes é uma "cadeira", estamos aplicando nosso conceito de "cadeira", adquirido através da observação direta de muitas outras cadeiras. De forma similar, o conceito de "quatro", uma vez adquirido, poderá ser aplicado em novas situações. No entanto, há uma grande diferença entre este e a aquisição do conceito de "cadeira": a idéia do "quatro" não é obtida através de observação direta. Um número é uma relação de quantidade, que se estabelece a partir da reflexão e da organização mental de diversas experiências. Deve ficar claro que "quatro" é um conceito, ao qual fazemos corresponder uma palavra (que será diferente em cada idioma), e um símbolo (que, embora arbitrário, é utilizado pela maioria das sociedades modernas). Mais ainda, uma criança pode usar diversas outras representações para "quatro": desenhos, dedos de sua mão, etc. No entanto, enquanto o conceito está em formação, a criança deve lidar também com os símbolos (algarismos) e a notação do sistema decimal, com a nomenclatura e com a ordenação dos números. Conceituar e representar números é uma construção longa e complexa, e a criança vai precisar de sua ajuda!

Os números em nossas vidas

Os números estão presentes em nosso cotidiano, e são utilizados com os mais diversos propósitos. Utilizamos os números para realizar contagens, ou seja, para responder a perguntas do tipo "quantos?" ("35 alunos", "meu álbum já tem 148 figurinhas", "tenho 7 reais a mais que você", etc.). O conceito de número ajuda ainda a identificar um objeto de uma coleção ordenada. Utilizamos a estrutura de ordenação dos números naturais para responder a perguntas do tipo "qual?" ("o quinto andar", "o décimo quarto na fila de espera" etc.).

Mas há outras aplicações em que a estrutura dos números naturais não é aproveitada; nelas, eles são usados apenas como um sistema eficiente de códigos – ou seja, como não números. Nestes casos, apesar de chamarmos estes registros de números (número da identidade, número do telefone, número do ônibus etc.) não faz sentido compará-los (por exemplo, dizer "meu número de telefone é maior do que o seu!" não tem significado prático). Observe alguns exemplos:

- identificar (número de documentos: CIC, RG, etc).
- diferenciar, localizar, selecionar (número de telefone, estação de TV)
- cifrar ou codificar (CEP: cidade, região, bairro, rua)
- nomear (Henrique II, D. Pedro I)

Lembre-se que não são somente os números naturais que estão presentes em nossas vidas. Quando medimos ou descrevemos medidas, utilizamos números decimais ou frações (1/2 quilo; R$ 3,50; 2,35 metros, etc.). Os números negativos são também encontrados em situações cotidianas para expressar dívidas ou temperaturas. Assim, o processo que se inicia com a construção dos números naturais pela criança precisa, aos poucos, ser ampliado para incluir novos campos numéricos e novas aplicações. As experiências iniciais são fundamentais para o bom desenvolvimento deste longo processo. E cabe à escola ajudar na construção do pensamento matemático da criança, enriquecendo e sistematizando as experiências vividas dentro e fora de seu espaço.

Algumas idéias para a sala de aula

Você vai perceber que as sugestões de atividades para a sala de aula, presentes neste livro, pedem que o professor coloque em prática algumas idéias. Por enquanto, apresentamos apenas um pequeno resumo de tais idéias, para que você possa ver, com os olhos da imaginação, como sua sala ficaria durante a aplicação de uma atividade. Ao longo do nosso trabalho, vamos retornar a estas idéias várias vezes e aprofundar mais e mais a discussão sobre sua importância.

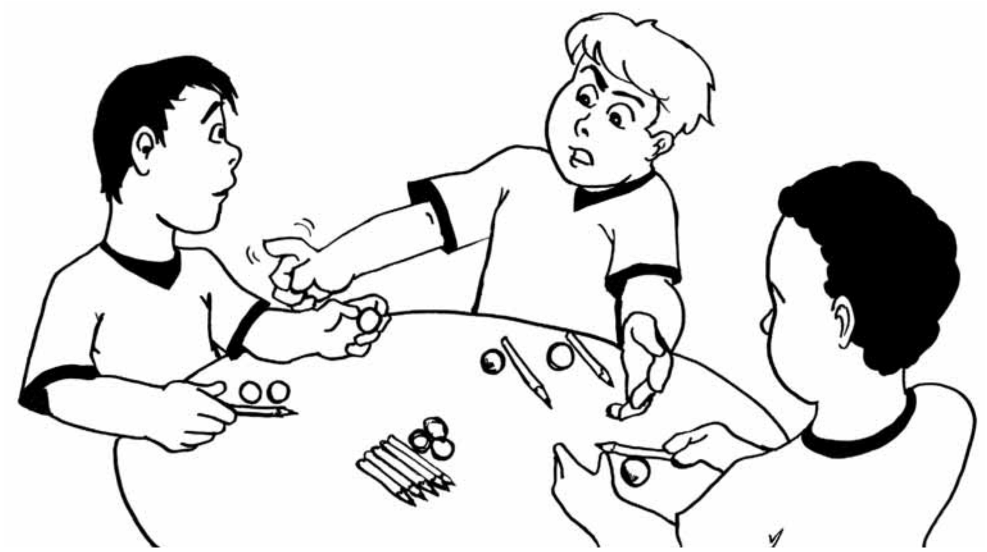
(1) Leve a Matemática para sua sala de aula e estimule seu aluno a se interessar por ela. Você pode usar muitos recursos, como: um mural (com os algarismos de 0 a 9, as dezenas e centenas, resultados para consulta e notícias com informações numéricas); um calendário; um quadro de aniversários; um quadro do clima (registrando, a cada dia, se ele está ensolarado, nublado ou chuvoso). A sala também pode conter diversos objetos ligados à Matemática, tais como: diferentes materiais de contagem, balança, fita métrica, dados, cartões com números e figuras para jogos etc.

(2) Lembre-se que, durante uma atividade, a criança vive um momento de aquisição de conhecimento. É importante ela tenha tempo de experimentar, refletir sobre suas ações e comunicar suas idéias.

(3) Evite manter seu aluno muito ocupado com tarefas "concretas", a ponto de não lhe sobrar tempo e espaço para refletir, concluir e aprender. Muito embora a manipulação de materiais seja fundamental neste estágio, não tome como princípio que a criança aprende somente por sua ação direta sobre os objetos. A reflexão acerca de suas ações e a comunicação de seus processos mentais são igualmente importantes.

(4) Lembre-se que há muita diferença entre o que uma criança é capaz de produzir sozinha e o que ela é capaz de elaborar com intervenção e mediação de um professor que lhe aponta caminhos e sugere ações. Assim, o papel do professor é ativo – ele sugere as atividades, corrige rumos, faz sugestões e perguntas, atua como mediador em negociações entre os alunos e sistematiza processos e resultados.

(5) As crianças devem viver situações em que possam trabalhar em grupo (ou duplas), trocar idéias e discutir sobre seu trabalho. O ambiente criado na sala de aula deve incentivar situações em que elas tomem decisões, discordem ou concordem umas com as outras, expliquem o que fizeram e porquê.



(6) Cabe ao professor criar um ambiente no qual as crianças possam falar de seu trabalho com a confiança de se sentirem respeitadas e apoiadas. Um aluno não deve se sentir desconfortável por ter errado; o professor deve ajudá-lo a encontrar novos caminhos.

(7) Compartilhe com toda a sala os processos realizados pelas crianças durante uma atividade. Após uma atividade, o professor deve resolver coletivamente a questão, fazendo perguntas e compartilhando as estratégias usadas pelos os alunos, perguntando: vocês acham que essa é uma boa forma de trabalhar?

SUGESTÕES DE ATIVIDADES

As atividades sugeridas neste capítulo foram divididas em dois blocos. O primeiro destaca *Atividades que conduzem ao Conceito de Número:* atividades de contagem, de estabelecer relações entre coleções diferentes e de ordenação de quantidades. No segundo bloco, apresentamos *Atividades de ampliação de habilidades* relacionadas ao conceito de número, indo além das fronteiras desta construção (atividades de classificação e de ordenação), pois elas serão úteis em muitos outros momentos de construção de conhecimento pelas crianças.

Atividades de contagem

Da mesma forma que uma criança aprende a falar enquanto fala (corretamente ou não), ela deve aprender a contar enquanto conta. Aproveite as muitas oportunidades que aparecerem em sala de aula para contar. Sempre que for significativo para os alunos, conte (e peça para que as crianças contem) alunos, lápis, brinquedos etc. Extrapole os limites de contagem das crianças (por exemplo, se elas só contam até 10, introduza contagens com 15 ou 20 elementos). Não espere até que seu aluno tenha o conceito pronto para fazer contagens (isso seria como pedir que uma criança só falasse quando já soubesse falar).

O conceito de número é construído lentamente, através de múltiplas experiências. Você irá observar que a contagem feita pelas crianças irá se aproximando, pouco a pouco, de uma contagem correta (vamos aprofundar esta idéia mais adiante). Você irá observar também que, ao longo das séries iniciais, aos poucos, a criança aprimora sua compreensão sobre a estrutura de nosso sistema de numeração, e passa a ser capaz de contar mais e mais adiante, com autonomia.

Atividades estabelecendo relações entre coleções diferentes

Como dissemos antes, o conceito de número está associado à percepção de uma característica comum a coleções de objetos. Assim, as crianças devem ser estimuladas a comparar coleções de objetos, estabelecendo relação entre seus elementos. Alguns exemplos:

• Peça que uma criança pegue um lápis na estante para cada aluno que está sentado em sua mesa (observe se ele se incluiu na contagem ou se vai faltar um lápis).

• Peça que a criança distribua biscoitos para os colegas em sua mesa na hora da merenda, dando dois biscoitos para cada um.

• Peça que a criança distribua materiais de uma caixa de contagem para os demais alunos. Por exemplo: tampinhas de refrigerante para os meninos e botões para as meninas.

• Atividades envolvendo correspondência um a um entre os elementos de duas coleções conduzem à comparação de quantidades e preparam para o conceito de igualdade e desigualdade entre números. Por exemplo:

Distribua para cada aluno 6 canetas e 6 tampas de caneta. Pergunte:

- *“Há mais canetas do que tampas?”*

Observe as estratégias utilizadas pelos alunos para comparar, pois algumas disposições espaciais podem causar dificuldades para os alunos nos primeiros estágios (ver figura). Peça, então, que os alunos retirem e coloquem as tampas nas canetas repetidas vezes. Em seguida, pergunte novamente:

- *“Há mais canetas do que tampas?”*

Repita a atividade, variando os materiais e as quantidades envolvidas, sempre permitindo que seus alunos desenvolvam suas próprias estratégias de comparação. Você pode usar, por exemplo: pires e xícaras, os próprios alunos e suas carteiras, pedras pequenas e pedras grandes etc. Aos poucos, os alunos devem concluir que a quantidade de objetos é independente da forma e do tamanho (por exemplo: podem existir menos pedras grandes que pedras pequenas, embora as pedras grandes amontoadas ocupem um volume maior do que as pequenas).

• Quando não podemos estabelecer uma correspondência um a um entre os elementos de duas coleções, percebemos que há mais elementos em uma delas. Este tipo de atividade contribui para a formação do conceito de desigualdade de números, e deve ser trabalhado concomitantemente com experiências envolvendo a igualdade.

Exemplo:

Peça que todos os meninos se levantem e formem uma fila. Em seguida, peça às meninas que façam o mesmo. Formadas as filas, peça que cada menino dê a mão a uma menina. Pergunte:

- *"Algum menino ficou sozinho?"*

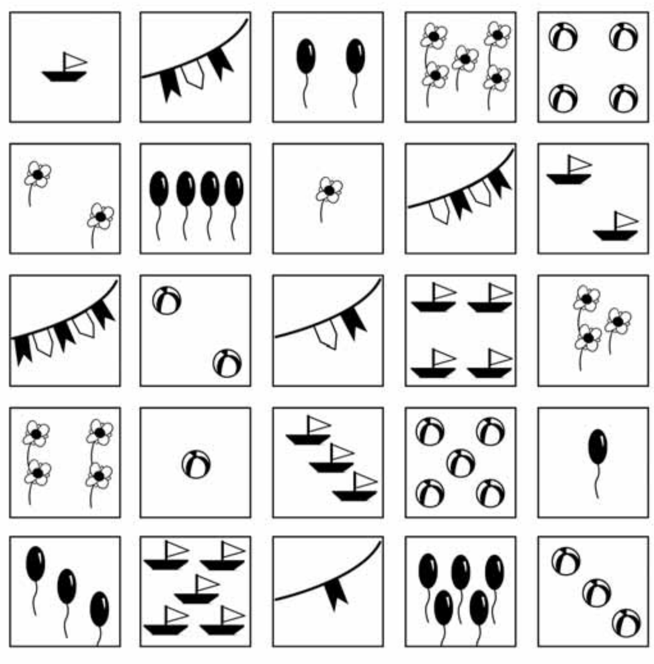
- *"Alguma menina ficou sozinha?"*

- *"Há mais meninas que meninos?"*

- *"Há mais meninos que meninas?"*

Crie novas versões deste tipo de atividade, dando montinhos de fichas e pedras, por exemplo, para que as crianças as coloquem em correspondência um a um. Não esqueça de intercalar atividades com a mesma quantidade de objetos nos dois montinhos com outras nas quais as quantidades são diferentes, e de conduzir as experiências através de perguntas sobre as quantidades envolvidas.

• Utilize um conjunto de cartões como os ilustrados abaixo (nos quais os objetos barco, bandeira, balão, flor e bola aparecem em quantidades de 1 a 5) e proponha as seguintes atividades:



1. Peça que a criança arrume os cartões usando seus próprios critérios, e discuta com os grupos as arrumações obtidas. Se todos tiverem arrumado os cartões pelo critério de forma, pergunte:

- *Como faço para encontrar o cartão com três balões?*

- *E para encontrar o cartão com três barcos?*

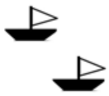
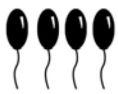
- *Existem mais cartões com três objetos? Quais?*

- *Quais são os cartões com dois objetos?*

2. Em outro momento, distribua os cartões e cinco caixas, marcadas com os símbolos |, ||, |||, ||||, ||||| e peça que as crianças arrumem as figuras nas caixas.

3. Peça que as crianças pintem ou desenhem os algarismos 1, 2, 3 , 4 e 5 para serem colados nas tampas das caixas. Deixe que elas mesmas colem e distribuam as tampas pelas caixas.

4. Em cartolina, crie a seguinte tabela:

					
1					
2					
3					
4					
5					

Esta tabela pode ser usada para identificar os cartões utilizando dois atributos: forma e quantidade. Deve ser utilizada da seguinte maneira:

- Peça à criança para observar atentamente a tabela ainda não preenchida.

- A seguir, as crianças observam os cartões para classificá-los.

- Deixe que os alunos descubram qual critério deve ser usado na classificação, pois, observando a tabela e as peças eles devem perceber que os atributos são forma e quantidade.

- Depois de terem feito essas observações, as crianças misturam os cartões, e você deve apanhar um; por exemplo, o que tenha dois barcos, perguntando:

- *"Como é esse cartão?"*

- *"Qual o lugar dele na tabela?"*

- Apanhe outros cartões e peça aos alunos que descrevam suas características e os distribuam pela tabela, obedecendo às indicações.

5. Amplie a atividade, incluindo novos cartões e novos registros com quantidades de 6 em diante. Este é um momento importante, pois números até 5 são mais

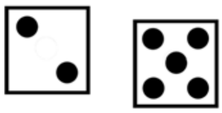
facilmente reconhecidos por mera percepção visual do que quantidades como 7 ou 9, por exemplo.

• JOGO DO COBRE-TUDO

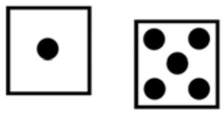
Cada criança recebe dois dados e uma cartela (com representações pictóricas ou com os números de 2 a 12). As crianças, em grupos de no máximo 4 alunos, jogam os dados alternadamente. Cada vez que um aluno joga os dados, coloca uma ficha na posição da cartela correspondente ao total obtido nos dois dados. Ganha o jogo quem preencher primeiro todas as posições da cartela (ou um certo número pré-determinado de posições).

Os alunos podem ainda fazer registros de suas jogadas, como ilustrado abaixo:

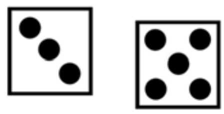
Jogada 1:

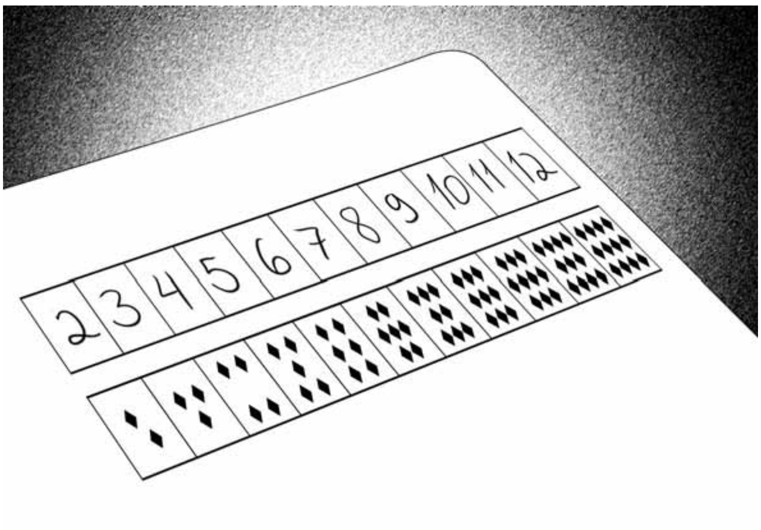


Jogada 2:



Jogada 3:

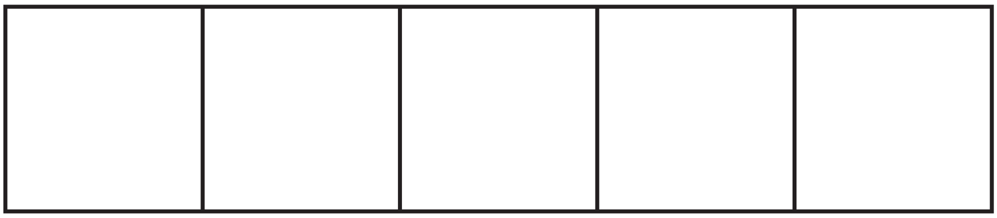




Atividades de ordenação de quantidades

A criança já traz consigo idéias sobre quantidades maiores ou menores que outras. A maioria delas desenvolve também uma percepção intuitiva de que números escritos com três algarismos, por exemplo, são maiores do que números com apenas um ou dois algarismos. O professor deve explorar tais noções e dar diversas oportunidades para que as crianças ampliem e refinem este conhecimento. Comparar coleções de objetos, estabelecendo relações de quantidade entre elas é uma estratégia fundamental neste estágio, e deve ser incentivada pelo professor. Seguem algumas sugestões que você pode utilizar em suas aulas.

• Utilizando, por exemplo, 15 chapinhas e uma folha de papel, dividida conforme o modelo abaixo, peça que os alunos coloquem uma chapinha na primeira divisão; a seguir, peça que coloquem outra chapinha na segunda divisão.



Pergunte:

- *"Onde há mais objetos?"*

- *"Quantos objetos há em cada espaço?"*

Peça então que coloquem outra chapinha dentro da segunda divisão e pergunte:

- *"E agora, onde há mais chapinhas?"*

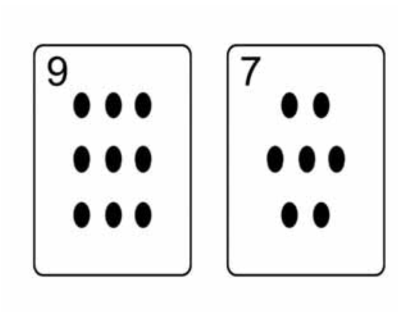
- *"Quantas a mais?"*

Peça que coloquem 2 chapinhas na terceira divisão e compararem o segundo espaço com o terceiro, repetindo as perguntas; peça que coloquem mais uma chapinha na terceira divisão, e repita as duas segundas perguntas. Proceda da mesma maneira até se esgotarem as chapinhas.

Repita esta atividade, ampliando a quantidade de material, para construir números maiores.

• JOGO BATALHA

Para este jogo são utilizadas as cartas de um a dez de um baralho (ou cartões, nos quais cada um apresenta a representação numérica e pictórica) divididas por duas crianças. Cada criança abre uma carta de seu monte e os valores são comparados. Quem tiver o maior valor, fica com as duas cartas. Em caso de empate, as crianças abrem uma nova carta que é colocada por cima das anteriores e quem tiver o maior número nesta nova rodada ganha as quatro cartas. Ao final do jogo, ganha quem tiver o maior monte de cartas.



Crie variações deste jogo, usando novos cartões com números e suas representações pictóricas em cartolina para ampliar o limite numérico (até 20, por exemplo).

• Você pode ainda comparar números escritos pelas crianças. Como, por exemplo, pedir que as crianças completem o seguinte registro:

Quem adivinha o número do calçado?

Da mamãe? ☐

Do colega ao lado? ☐

Do papai? ☐

De um gigante? ☐

De uma fada? ☐

Utilizando os registros feitos pelas crianças, (como exemplificado abaixo) pergunte:

- *Quem calça menos?*
- *Quem calça mais?*
- *Quem calça mais que o papai?*
- *Quem calça menos que a mamãe? entre estes, quem calça menos?*

Quem adivinha o número do calçado?

Da mamãe? 6

Do colega ao lado? 5

Do papai? 12

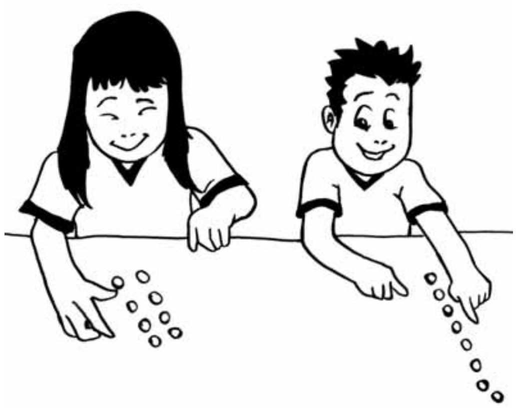
De um gigante? 1000

De uma fada? 1

ESCUTE SEU ALUNO

Primeira Escuta

A professora pediu que Ana e Paulo contassem suas coleções de bolinhas, sem movê-las. Ana respondeu: “8” e Paulo respondeu: “9”.



A seguir, a professora pede que refaçam a contagem, permitindo, agora, que elas movam as bolinhas. Eis as ações e respostas de cada criança:

Ana afirma: “Tem 8, mas vou arrumar”. Em seguida, move suas bolinhas para a disposição ao lado.

Paulo primeiro move as bolinhas para a disposição ao lado só então diz: “8 bolinhas”

“Escutando” as respostas nas duas etapas de Paulo e Ana, vemos que Paulo ainda não é capaz de contar corretamente sem arrumar espacialmente as bolinhas. A medida que tenha novas experiências, Paulo deve passar a ser capaz de estabelecer uma ordem mental *independente* da organização espacial, assim como Ana (ela foi capaz de contar corretamente, sem mover as bolinhas e pareceu movê-las apenas para efeito de confirmação). O professor deve oferecer a Paulo mais oportunidades de realizar novas experiências, modificando, a cada vez, a quantidade de objetos.

Segunda Escuta

A professora deu um montinho de 6 fichas para Alice e um de 7 fichas para Daniel. A professora pergunta quem ganhou mais fichas. Alice e Daniel organizam suas fichas lado a lado, e respondem:

- Alice: “O Dani.”
- Daniel: “Eu!... Tenho 7 e Alice só tem 6.”

Quando questionados sobre quantas fichas Daniel tem a mais do que Alice, eles respondem:

- Alice: “Sete” (apontando para a ficha não emparelhada)
- Daniel: “Uma” (apontando para a mesma ficha)

“Escutando” as respostas de Alice e Daniel nas duas etapas, vemos que ambos são capazes de fazer a comparação entre as quantidades de bolinhas. Entretanto, Alice mostra que pensa em “sete” como sendo o “nome” da sétima bolinha, o que nos revela que ela ainda não construiu a idéia de que a quantidade 6 está incluída na quantidade 7. Por outro lado, Daniel demonstra uma idéia clara de inclusão, ou seja, de que 7 é um a mais do que 6.

Para além das fronteiras

As habilidades de classificar e de ordenar coleções de objetos são parte integrante da construção do conceito de número quando consideramos o atributo quantidade. Elas são importantes, também, em diversas outras situações, quando são utilizados outros atributos, pois estabelecem um processo de organização do conhecimento pela criança, permitindo avanços em sua capacidade de abstração. As atividades sugeridas a seguir exemplificam diferentes situações em que estas habilidades podem ser exploradas pelas crianças.

Atividades para o desenvolvimento da habilidade de classificar

Para que a classificação num nível mais abstrato possa ocorrer, é necessário planejarmos atividades que permitam às crianças identificarem diferenças e semelhanças.

Vejamos alguns exemplos:

• Trace dois círculos no pátio e dê ordens de forma a obter dois agrupamentos.

- *"Meninas num círculo e meninos no outro".*

- *"Crianças com óculos num círculo e crianças sem óculos no outro".*

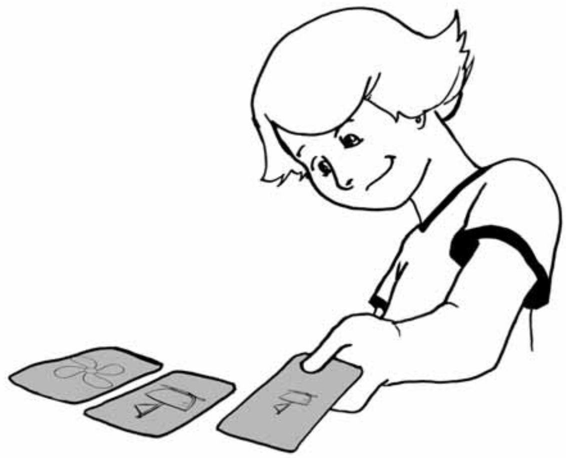
Você pode descobrir com a turma critérios de arrumação para outros agrupamentos, que eles próprios façam.

• Utilize também pequenos objetos (carrinhos, bolinhas, pedaço de giz, etc.) e sacos plásticos transparentes. Distribua os objetos e deixe que as crianças os manipulem e façam construções à vontade. Proponha a elas, arrumar os objetos de maneira que seja fácil encontrá-los quando for necessário usá-los. Para isso, por exemplo, inicie uma arrumação, colocando dentro de cada saquinho um ou dois objetos de cada tipo e peça que as crianças continuem a tarefa.

Repita várias vezes a atividade, utilizando diferentes objetos, até que as crianças escolham, elas próprias, um critério de classificação.

Sugerimos que você dê preferência a materiais feitos pelos alunos, sempre que isso for possível, mas você também pode usar, indiferentemente, materiais industrializados ou os que você mesmo fabricou.

• Os jogos são atividades que levam o aluno a perceber bem as diferenças entre atributos de objeto que podem levar à classificação, já que utilizam coleções de materiais construídos para valorizar diferentes atributos. Por exemplo: construa 18 cartões, usando as formas flor, bola e barco, em tamanhos grande e pequeno, e nas cores amarelo, azul e vermelho. Proponha um jogo em que os alunos devem colocar uma peça ao lado de outra (como um dominó), usando como regra *"ter apenas uma diferença"* com relação à peça anteriormente colocada na fila.



Por exemplo: uma flor grande e azul pode vir ao lado de um barco grande e azul, pois a única diferença é a forma. Um barco pequeno e azul pode se seguir ao barco grande e azul, pois a única diferença é o tamanho. E assim sucessivamente.

Atividades que conduzem a um critério de ordenação

As atividades de ordenação decorrem, naturalmente, daquelas ações em que foram exploradas as percepções visuais, permitindo que as crianças façam comparações, estabelecendo um critério de ordenação.

Vejamos um exemplo:

Distribua aos alunos nove tiras de papelão de cores diferentes da mesma largura, mas de comprimentos diferentes.

Numa primeira etapa, distribua somente três tiras e peça às crianças que as arrumem da maior para a menor.

A seguir, ofereça uma tira intermediária e peça que ela seja colocada na ordem estabelecida. E assim por diante, até se esgotarem as tiras.

A partir da observação dessa última ordenação de tiras, pergunte:

- *"Qual a tira maior?"*
- *"Qual a tira menor?"*
- *"Qual a tira maior que a azul e menor que a vermelha?"*
- *"Qual a tira imediatamente menor que a azul?" (idéia de antecessor)*
- *"Qual a tira imediatamente maior que a azul?" (idéia de sucessor)*

Faça diversas perguntas desse tipo, usando as várias tiras.

Repita a atividade acima, empregando materiais com os quais se possa pedir às crianças arrumações do tipo: do mais claro para o mais escuro; do mais comprido para o mais curto; do mais áspero para o mais liso, etc. Essas atividades também podem ser vividas pelas próprias crianças, comparando o tamanho de uma criança com o de outra e ordenando. Escolha crianças que tenham uma diferença de altura bem acentuada.

Podem ser desenvolvidas outras atividades, utilizando peças de materiais que tenham diferenças de atributos. Arrume as peças usando um critério de ordenação como, por exemplo: uma peça grande, uma peça pequena, uma peça grande, etc. Iniciada a fila, peça a uma criança que a continue, observando o critério de ordenação.

Peça a um aluno que pense em outro critério de ordenação, que comece outra fila e peça a um colega para continuar.

LEMBRE-SE

Para chegar ao conceito de número, as crianças construirão conhecimentos pela reflexão acerca de suas ações sobre os objetos, mas também através da socialização, compartilhando atividades com seus colegas e discutindo processos e resultados. Em todos os momentos de transmissão de saberes culturais e de sistematização de processos e resultados, o papel do professor é fundamental, e você deve se colocar numa postura atenta e negociadora, ao invés de autoritária.

As noções de classificação, ordenação, seriação e comparação são fundamentais para muitas aquisições das crianças nesta fase de escolaridade. Elas devem ser propostas em paralelo ao processo de conceituar número. Atividades deste tipo ajudam a desenvolver a capacidade de abstrair e a autonomia de pensamento da criança.

ATIVIDADES PARA O PROFESSOR

1. Contando Casos: Faça um pequeno relato sobre uma experiência com seus alunos relacionada com os temas discutidos nesta aula.

2. Crie pelo menos duas variações do jogo do cobre-tudo, usando um número diferente de dados em cada uma delas; explore também diferentes representações nas casas da cartela. Para cada variação que você criar, estabeleça objetivos de aprendizagem para seus alunos.

3. Duda, Felipe e Rodrigo receberam, cada um, dois montinhos de botões: um deles com 9 botões grandes e outro com 11 botões pequenos. A professora pediu que cada um deles adivinhasse em qual montinho havia mais botões. As respostas foram:

Duda: "Neste" (aponta para o montinho de botões grandes)

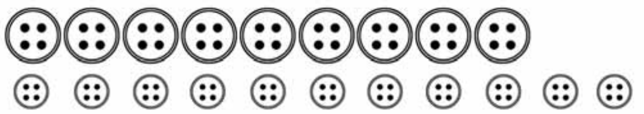
Felipe: "Neste" (aponta para o montinho de botões grandes)

Rodrigo: "Não sei – tem que arrumar"

Explique a diferença de pensamento indicada pelas respostas de Rodrigo quando comparada às respostas de Duda e Felipe?

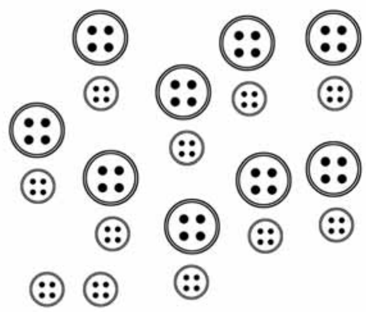
4. Dando continuidade a atividade relatada no exercício anterior, a professora pede que cada criança faça como Rodrigo sugeriu e arrume as duas coleções de botões. Os resultados das ações e as respostas das crianças estão exibidos abaixo.

Duda "Tem mais dos pequenos".



Felipe "Tem mais botões grandes"

Rodrigo "Tem mais dos pequenos, sobraram dois"



Você poderia explicar a estratégia usada por cada criança, e como esta se relaciona com sua resposta?

5. Durante o processo de aquisição do conceito de número, vai se tornando mais fácil para uma criança responder perguntas sobre comparações entre coleções diferentes. Por exemplo, rapidamente a criança será capaz de responder que há mais maças do que bananas na coleção de frutas apresentada a seguir. No entanto, pode ser difícil para ela comparar, quantitativamente, uma parte da coleção com o todo, ou seja, comparar a quantidade de maças (5) com a quantidade de frutas (8 – maçãs + bananas).

(a) Faça um experimento com alguns alunos nesta faixa de escolaridade. Mostre o conjunto acima e pergunte: "Há mais maças ou mais frutas?". Registre os resultados.

(b) Com os mesmos alunos, faça perguntas de contagem (quantas maçãs?, quantas bananas? quantas frutas?) e volte a repetir a pergunta "Há mais maças ou mais frutas?". Registre os resultados.

(c) Faça um comentário sobre os resultados obtidos nos experimentos acima. Se achar conveniente, discuta a seqüência de perguntas que você usou, para ajudar o aluno a perceber a comparação entre a parte e o todo.

(d) Apresente pelo menos mais dois exemplos de atividades, envolvendo diferentes coleções de objetos em diferentes quantidades que podem ser utilizados para ajudar a criança a desenvolver a habilidade de comparar uma parte com o todo. Não esqueça de anotar as perguntas que você pretende fazer aos seus alunos.

6. Elabore atividades que ajudem as crianças a perceber as seguintes idéias:

(a) Números entre dois números dados (por exemplo: números entre 3 e 7)

(b) Antecessor de um número

(c) Sucessor de um número.

AULA 3

O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

OBJETIVOS DESTA AULA

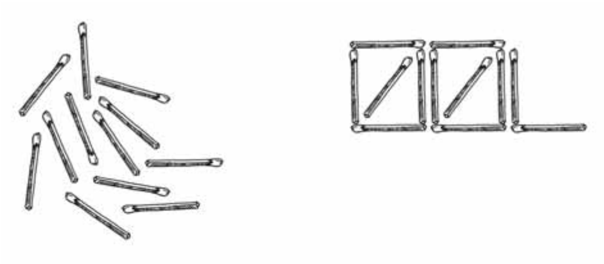
- Propor atividades de manipulação concreta para a compreensão do sistema decimal de numeração.
- Analisar os princípios básicos de uma notação posicional.

TEXTO PARA LEITURA

Como já vimos, não sabemos exatamente como se deram os primeiros passos no emprego dos números pelos homens, mas sabemos que o sistema de numeração que utilizamos demorou séculos para ser desenvolvido. Isso nos dá uma idéia de que este sistema de numeração não é simples, e que sua compreensão pelas crianças deve ser cuidadosamente desenvolvida, passo a passo.

Os números naturais são usados para a contagem. Usamos números para contar, por exemplo, quantas crianças estão em sala hoje e também comunicar a outros este conhecimento. Também usamos a contagem para decidir, por exemplo, se há mais ou menos canetas sobre uma mesa do que borrachas em uma caixa (comparação de números), além de muitas outras finalidades. Para contar, o homem desenvolveu estratégias e formas socializadas de registrar os resultados.

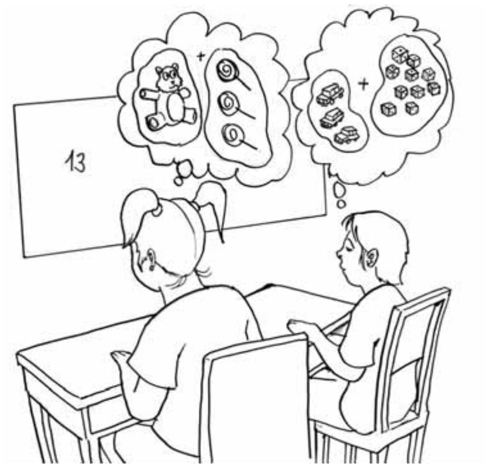
A primeira grande estratégia de contagem é o *agrupamento*. Formar grupos organiza o que deve ser contado, tornando mais fácil não esquecer objetos e evitando que um mesmo objeto seja contado mais de uma vez. A figura abaixo ilustra a importância desta estratégia. Em qual das duas configurações você acha que é mais fácil contar o total de palitos?



Nosso sistema de numeração está baseado em uma estratégia de agrupamento: juntamos dez unidades para formar uma dezena, dez dezenas para formar uma centena, dez centenas para formar um milhar, e assim por diante. Esse sistema é chamado *decimal* exatamente pela escolha de agrupar de dez em dez.

Também já discutimos que mesmo crianças muito pequenas "recitam" números (esquecendo alguns, repetindo outros mais de uma vez), mas isso não significa que elas compreendem o que estão dizendo. Não é óbvio, também, que mesmo uma criança que escreva corretamente um número como *14*, por exemplo, compreenda que o algarismo *1* é utilizado nesta representação com um significado diferente do que ele assume em representações como *1* ou *21*, por exemplo. O fato de que o mesmo símbolo pode representar quantidades diferentes é uma grande vantagem de um sistema posicional (repare, por exemplo, que isso não é verdade para o sistema de numeração egípcio – para representar números muito grandes, seria necessário introduzir cada vez mais símbolos).

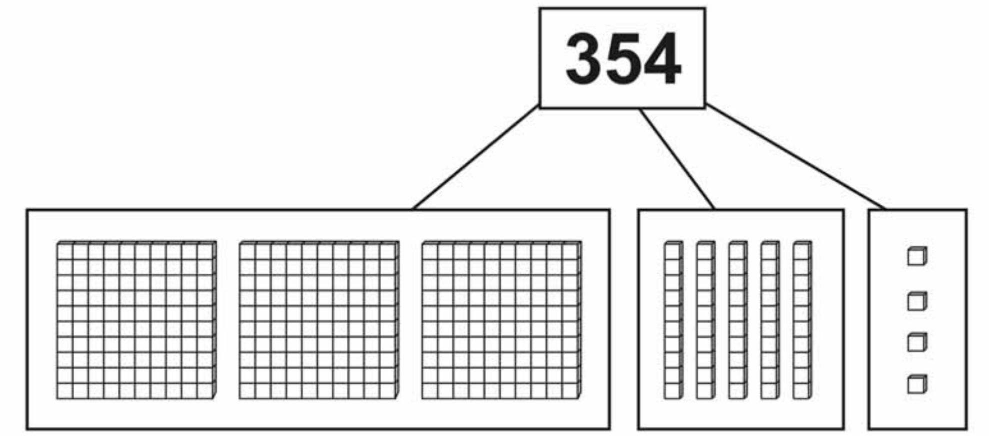
Utilizando apenas dez símbolos (os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0) somos capazes de representar qualquer número natural. O valor representado por um algarismo vai depender de sua posição na representação, por isso o sistema é chamado *posicional*. Esta é uma idéia sofisticada, que demorou muito tempo para ser desenvolvida pela humanidade, e que precisa ser muito bem trabalhada com as crianças. É nessa idéia que estão apoiados, por exemplo, todos os algoritmos de cálculo que utilizamos.



Para desenvolver um sistema posicional, o algarismo para representar o zero (0) é de importância fundamental. Essa é uma outra idéia sofisticada: afinal, para que serve representar o "nada"? A seguir, vamos discutir a força desta idéia.

Os princípios básicos da notação posicional e a importância do zero

Examinando o sistema de numeração decimal, vemos que o significado de um símbolo depende da posição que ele ocupa. Observe o número trezentos e cinqüenta e quatro – *354.* O símbolo à direita significa quatro unidades ou quatro. O algarismo 5, colocado imediatamente à sua esquerda, significa cinco dezenas, ou cinco grupos de dez unidades ou ainda cinqüenta unidades. O próximo algarismo à esquerda do cinco é o 3, que significa três centenas ou 3 grupos de uma centena, ou 30 grupos de uma dezena cada, ou ainda trezentas unidades. O quatro, o cinqüenta e o trezentos somam trezentos e cinqüenta e quatro, e isto é o que o 354 representa. Para escrever números como este, apenas nove dos símbolos hindus seriam suficientes.



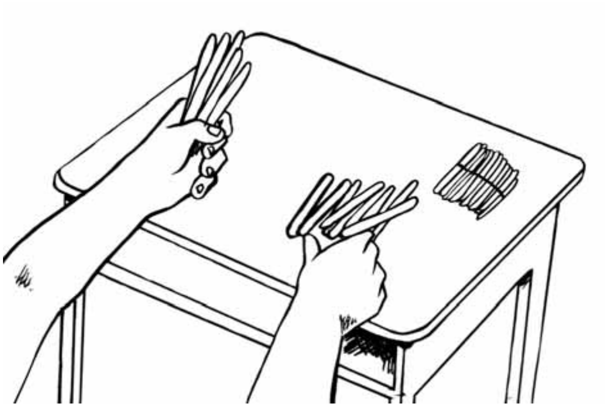
Agora suponhamos que eu quisesse escrever o número duzentos e três. Não é possível escrever *23*, pois estaríamos usando a mesma representação para duas quantidades diferentes. Esta é a representação que usamos para o número vinte e três (isto é: dois grupos de uma dezena e mais três unidades). O número que queremos escrever tem 2 centenas, ou 20 dezenas (não sobram outras dezenas além daquelas que foram agrupadas em centenas) e tem ainda 3 unidades.

Precisamos, então, usar um símbolo para representar o "nada", a ausência de dezenas não agrupadas em centenas. Quando escrevemos 203 acabamos com qualquer ambigüidade que pudesse existir entre a representação para duzentos e três e a representação de vinte e três.

Assim, além dos nove símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, foi preciso acrescentar um símbolo para "nada", para o zero (0). Com apenas estes dez símbolos qualquer número pode ser escrito em nosso sistema decimal e posicional.

Trabalhando com material concreto

Vimos que o processo para aquisição de nosso sistema de numeração pela humanidade foi longo e trabalhoso. É exigir muito das crianças que, só através da representação simbólica dos números, elas consigam entender e analisar a necessidade de um sistema posicional. Paralelamente à construção do conceito dos números, a criança relaciona os símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5 ... 9 às respectivas quantidades que eles representam e consegue ordenar estas quantidades, observando que o sucessor de um número tem sempre uma unidade a mais. A partir desse momento, faz-se necessário um longo trabalho com material de contagem (palitos, pedrinhas, chapinhas, fichas, elásticos, caixinhas de vários tamanhos), com o qual ela possa fazer seus próprios agrupamentos e identificar os diferentes valores que um algarismo pode ter, dependendo da posição que ele ocupa nesse número.



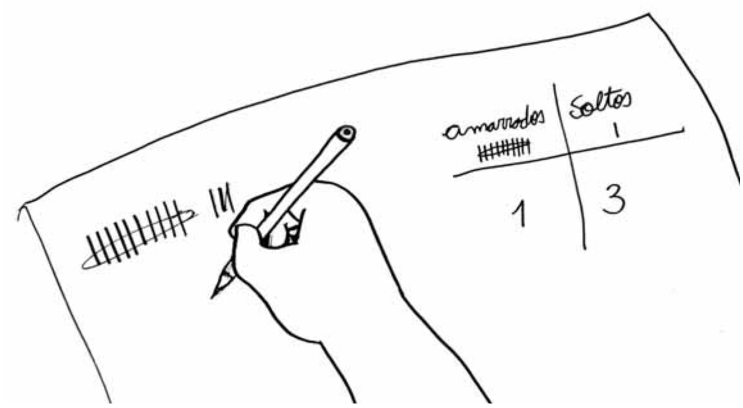
SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Dê uma quantidade de palitos ou chapinhas maior que nove (fica a seu critério a quantidade), e peça às crianças que escrevam o símbolo que representa essa quantidade. Se a quantidade for treze, crianças que ainda não assimilaram o significado da notação posicional podem até escrever 13, mas tal representação, muito provavelmente, decorre de observações informais do dia a dia. Você pode perguntar então:

- *"Por que esse número tem dois símbolos?"*

- *"O que quer dizer o um à esquerda do três?"*

As respostas serão informais e imprecisas e podem variar bastante de um aluno para o outro, já que os alunos trazem para a escola experiências numéricas diversas. Mas a situação-problema está lançada, e cabe ao professor auxiliá-los na descoberta. Coloque então vários palitos (inicialmente menos que 100) sabre uma mesa e dê elásticos para as crianças. Peça a elas para formarem grupos de *dez* palitos e depois amarrarem cada grupo de palitos com um elástico. Faça diversas dessas situações, aumentando e diminuindo a quantidade de palitos que você tinha disponibilizado inicialmente para as crianças (mas nunca ultrapassando 100 palitos). Após cada contagem, a criança deverá representar o que fez com desenho e anotar o resultado numa tabela. Assim:



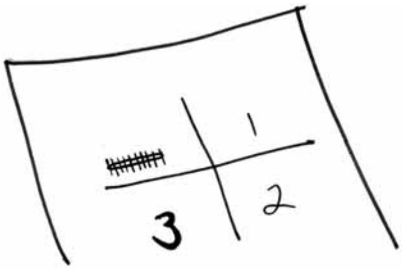
Como temos insistido, o papel do professor durante atividades de construção de conhecimentos matemáticos é estimular a reflexão, a observação, o raciocínio lógico e independente. Assim, durante a atividade sugerida, faça perguntas para verificar a compreensão do processo de agrupar quantidadades:

- *"Para fazer um "montinho", quantos palitos devo ter?"*

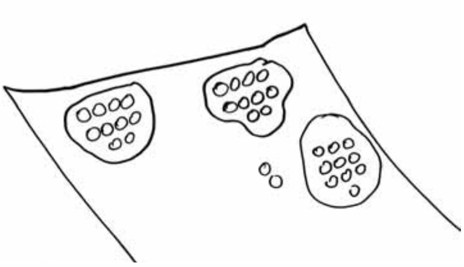
- *"Quantos palitos no máximo podem ficar sem amarrar?"*

- *"Se tenho dez palitos, que devo fazer com eles?"*

Após fazer várias vezes essas contagens, repita as perguntas. Depois escreva uma tabela no quadro, como esta:



• Peça que eles arrumem a quantidade indicada. Repita diversas vezes essa atividade, inicialmente com os palitos e outros materiais, como tampinhas e fichas, e depois através de desenhos. Por exemplo:



• Em outra etapa, você pode mostrar etiquetas como $\boxed{16}$ e $\boxed{61}$, perguntando:

- *"Elas representam a mesma quantidade?"*

- *"Represente o 16 com desenho"*

- *"Represente agora o 61 com desenho"*

Solicite às crianças que observem a diferença existente entre esses dois agrupamentos. Depois de muitas atividades como as descritas acima, volte à pergunta que deu início a todo esse processo, e compare a resposta que seus alunos são agora capazes de produzir com aquela que eles deram no momento inicial. Apresente o número 13 e pergunte outra vez:

- *"Por que esse número tem dois símbolos?"*

- *"O que quer dizer o um na frente do três?"*

As respostas a essas duas perguntas já devem aparecer após as primeiras atividades concretas, mas lembre-se que a verbalização de um processo mental nessa idade pode ser difícil, e permita as crianças se expressarem livremente.

A ordenação

Quando apresentamos para você dois números naturais como:

8 768 e **20 211**

e perguntamos qual deles é o maior, acreditamos que você não tenha dificuldades em responder. Você não se confundirá, por exemplo, pelo fato de que os algarismos que compõem o número 8768 têm, separadamente, valores absolutos maiores do que aqueles que compõem o número 20211. Na verdade, dependendo de quão "grandes" forem os números dados, decidir qual é o maior pode ser mais fácil do que a tarefa de ler estes números corretamente! Você é capaz de responder esta pergunta com facilidade por ter compreendido uma das características do sistema decimal de numeração – quanto mais algarismos, maior o número. É a compreensão do sistema que permite uma pessoa fazer uma primeira ordenação dos números naturais, decidindo qual é maior, qual é menor ou ainda se eles são iguais.

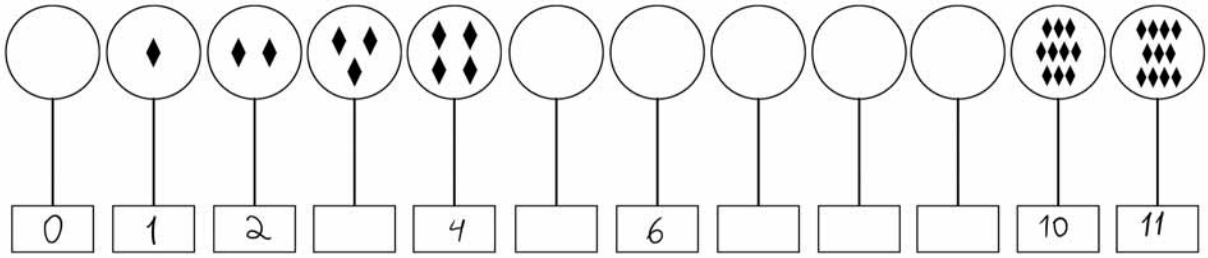
Da mesma forma que o significado da representação decimal dos números tem que ser aprendido pelos alunos, a ordenação destes números também necessita de tempo de trabalho e de reflexão, e o professor deve estar atento a isto.

O trabalho com material concreto contribui para a descoberta de critérios de comparação e ordenação de quantidades. Fazendo corresponder a cada elemento de um grupo de objetos um elemento do outro grupo, o aluno se torna capaz de ordenar dois conjuntos, decidindo se um deles tem mais elementos que o outro, ou se ambos têm quantidades iguais.

Desta forma, estamos ajudando nossos alunos a dar significado a relações importantes: "... há mais elementos que...", "... há menos elementos que...", "... há tantos elementos quanto...".

Ao associar a quantidade de elementos de cada um dos conjuntos a um número natural, o aluno estará construindo um significado para a ordenação dos números. Outras relações importantes podem ser construídas: "qual vem antes de...", "qual vem depois de...", "qual vem imediatamente antes de...". Também é importante explorar perguntas tais como: "quantos a mais", "quantos a menos" etc , que serão importantes para dar significado às operações com números naturais.

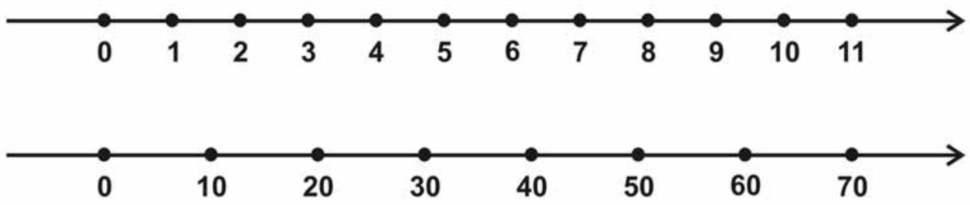
Em paralelo a esta etapa, há, também, a tarefa de ordenar os números. Distribua, por exemplo, uma folha com desenhos, como o modelo da figura a seguir; peça aos alunos que a completem com números ou desenhos, ou então com os dois.



Repita essa atividade partindo do 20 ou do 30, faça variações, usando ordem crescente e decrescente, ou "pulos" de 10 em 10, de 5 em 5, entre outras possibilidades.

A reta numérica

A representação dos números em uma reta é um recurso extremamente valioso em Matemática, que é utilizado pelos alunos em todos os níveis de ensino, crescendo em importância a medida que o aluno avança. Experiências com este modelo podem se iniciar bem cedo, utilizando recursos concretos, como barbantes, passos sobre uma linha desenhada no chão etc. Observe que a reta numérica ajuda muito a compreender e visualizar a ordenação dos números naturais.



Você pode usar diversas escalas (a distância entre os pontos marcados numa reta deve ser fixa, mas pode variar de uma reta para outra) e escolher quais pontos marcar (de 1 em 1, de 5 em 5, de 10 em 10). Nas primeiras experiências, é importante iniciar sempre do zero e os alunos devem perceber que é preciso usar espaços iguais entre as marcas que representam intervalos iguais. A reta numérica é um excelente apoio visual para as atividades de ordenação de números naturais deste capítulo e para a realização de operações, que desenvolveremos em outros capítulos.

As centenas

Quando os alunos já estiverem trabalhando números com dois algarismos com mais facilidade, faça os agrupamentos com quantidades maiores que 99, utilizando o mesmo processo adotado até o momento. Nesta etapa, é fundamental enfatizar que a "regra do jogo" precisa ser mantida, ou seja, em nosso sistema de numeração usamos agrupamentos de 10 em 10. Assim, os alunos devem perceber que, ao completarem dez grupos de dez, é preciso fazer um novo agrupamento de outra ordem, ou seja, um grupão de grupos dez. O novo grupão, que conterá 100 unidades ou dez dezenas, será representado por um algarismo em uma nova casa decimal, uma nova ordem.

Quando houver necessidade de uma quantidade muito grande de palitos, negocie com as crianças a troca de grupos e grupões por palitos coloridos. Você e seus alunos podem negociar os critérios de troca, mas não esqueça que, mesmo assim, é preciso ter uma grande quantidade de material que represente as unidades, pois o aluno deve vivenciar algumas trocas concretamente. Por exemplo:

• *1 palito natural vale 1 unidade.*

• *1 palito vermelho vale 10 palitos naturais, logo, 10 unidades.*

• *1 palito azul vale 10 vermelhos, ou seja, 100 naturais. Portanto, 100 unidades.*

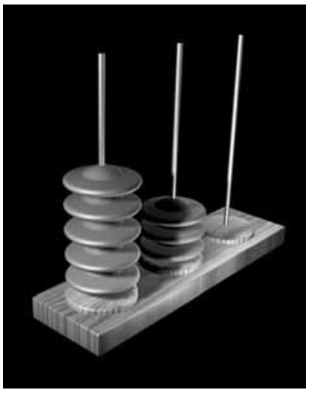
Assim, após algumas trocas, para escrever 984 bastariam 9 palitos azuis, 8 vermelhos e 4 da cor natural, ao invés de 984 palitos naturais.

OUTROS RECURSOS

Não podemos esquecer que o sistema de numeração decimal levou séculos para ser construído. Portanto, é necessário que a criança vivencie de diferentes maneiras esse aprendizado, utilizando diversos materiais, que possam ser explorados como nos exemplos com palitos e fichas que apresentamos. Quanto mais modelos forem utilizados, mais o pensamento da criança se torna flexível e mais fácil será para ela chegar a um conceito mais abstrato, que poderá ser transportado para novas situações. Veremos a seguir exemplos de materiais estruturados que você pode utilizar com seus alunos para ampliar as experiências e possibilitar uma compreensão efetiva das características de nosso sistema de numeração.

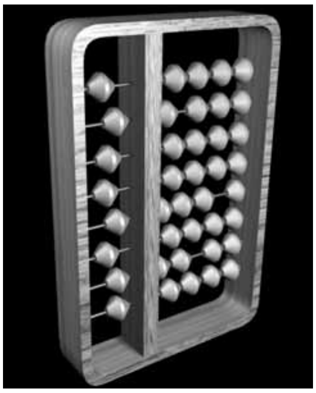
O ábaco

Você pode encontrar diversos modelos industrializados de ábaco.



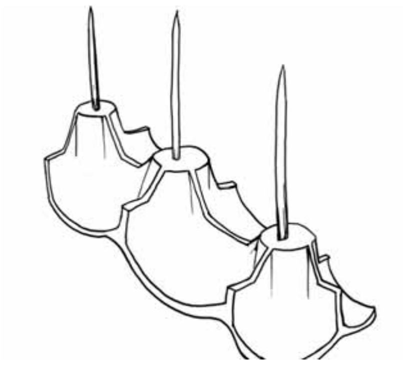
Ábaco vertical, com bolinhas ou argolas que podem ser retiradas

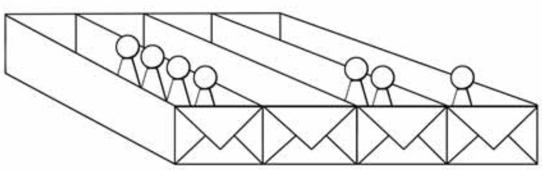
Ábaco horizontal, com bolinhas que não podem ser retiradas



Ábaco tradicional, utilizado até hoje por povos orientais.

Mas você e seus alunos também podem construir ábacos usando materiais simples como placa de madeira ou isopor, caixas de ovos vazias, varetas de churrasco, contas ou argolas. Até mesmo com caixas de pasta de dente coladas e com uma das faces retiradas e peças de jogos (ou fichas) podemos montar um ábaco.

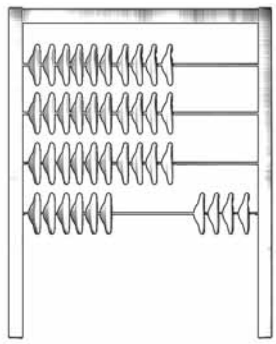




No ábaco, a representação de um número corresponde a sua escrita numérica, inclusive quando se trata da ausência de alguma ordem, pois nesse caso, a vareta que representa esta ordem não deverá conter nenhuma bolinha ou argola.

Para começar a trabalhar com o ábaco, você precisa combinar com seus alunos as regras e procedimentos de uso. Para exemplificar, vamos imaginar que vocês vão utilizar ábaco horizontal que não pode ter suas bolinhas retiradas. Neste caso, as regras seriam:

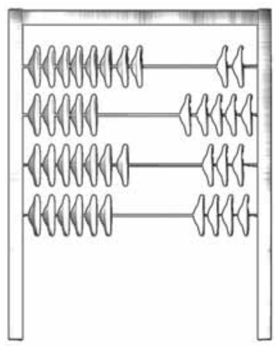
- As bolinhas que estiverem à esquerda não têm valor. Contamos apenas aquelas que tivermos movido para a direita do ábaco.



4 unidades

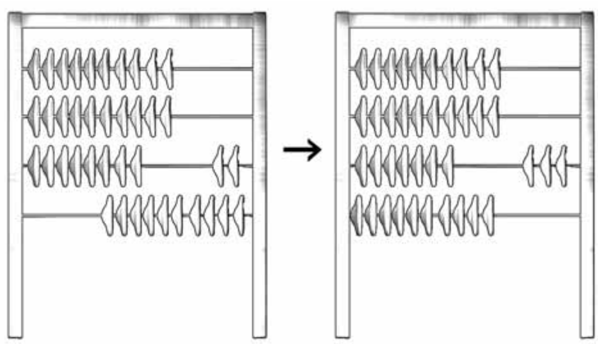
- A primeira linha de baixo para cima representa as unidades, a seguinte as dezenas, e assim por diante. Assim, cada bolinha da primeira linha vale 1, cada bolinha da segunda linha vale 10, cada bolinha da terceira linha vale 100, e assim por diante.

Unidades de milhar
Centenas
Dezenas
Unidades



2 mil
quinhentos
trinta
quatro

- Observe que cada linha de ábacos deste tipo só possui 10 bolinhas. Isto ajuda a criança a fixar que é sempre preciso trocar cada 10 bolinhas de uma linha, por uma bolinha da próxima linha. Observe:



20 + 10 = 30

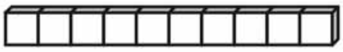
Atenção

Cada tipo de ábaco exige que se combine com os alunos um procedimento específico. No ábaco vertical, ao completar 10 bolinhas de uma mesma ordem, estas são *retiradas* e substituídas por uma bolinha na ordem seguinte. No caso dos ábacos horizontais, não é possível retirar as bolinhas, assim ao completar dez bolinhas de uma mesma ordem, devemos arrastá-las para a esquerda, substituindo-as por uma bolinha da ordem imediatamente superior, que deverá ser arrastada para a direita.

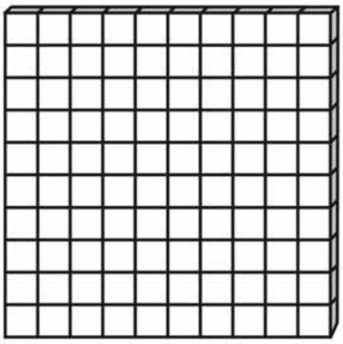
Material Dourado

Este material, também conhecido como material montessoriano de contagem, é composto de cubos, barras e placas de madeira, de modo que:

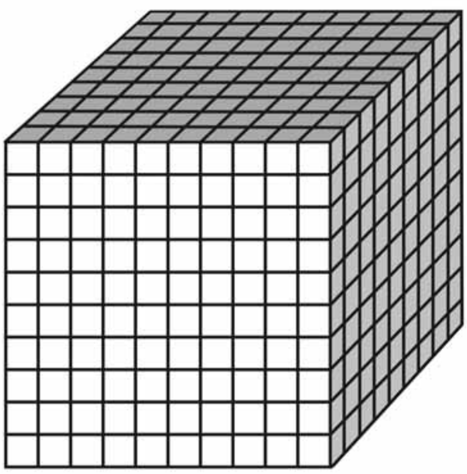
• um cubo pequeno, de 1 cm x 1cm x 1 cm, representa a unidade.



• uma barra, com 10 cubos unidos, representa 1 dezena.



• uma placa com 100 cubos unidos (ou 10 barras unidas) representa a centena.



• um cubo grande, com 1.000 cubos pequenos (ou 10 placas unidas ou 100 barras unidas) representa o milhar.

Se você encontrar dificuldade em conseguir os cubos e barras de madeira, use cartões em que os quadradinhos são desenhados, formando as unidades, dezenas e centenas. Em um segundo momento, as crianças podem também passar a representar este material na forma de desenhos – esta idéia será bem explorada ao trabalharmos com as operações de números naturais mais adiante.

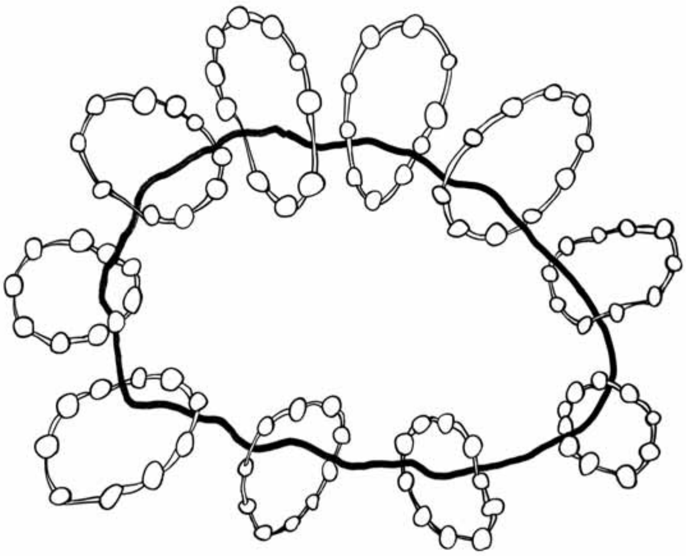
"Pulseiras e colares"

Podemos também construir cordões de contas ou sementes. Assim:

• uma conta representa uma unidade.

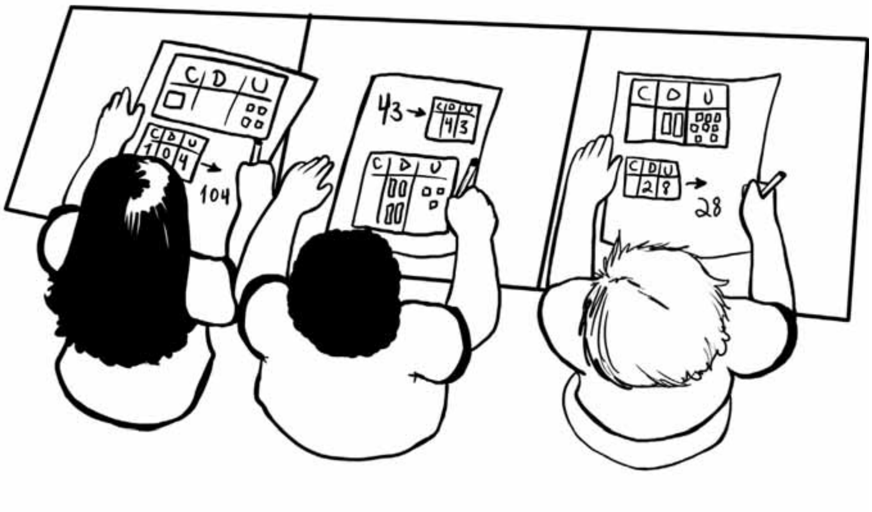
• uma "pulseira" (argola pequena) com 10 contas representa uma dezena.

• uma "colar" (argola maior), com 10 "pulseiras", representa uma centena.



O Quadro Valor de Lugar (QVL)

O QVL, mostrado na ilustração a seguir, é um recurso que reforça o significado da representação posicional decimal. Ao montar uma tabela, na qual estão indicadas claramente as ordens decimais (unidade, dezena, centena, etc.), o aluno tem a oportunidade de fazer e desfazer agrupamentos, representar através de desenho estes agrupamentos, e dar significado aos números escritos no sistema decimal de numeração.

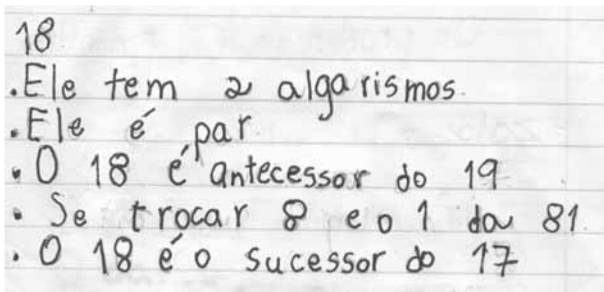


O QVL é um recurso que deve acompanhar os alunos durante todo o aprendizado do sistema decimal de numeração e dos algoritmos das operações com números naturais. Ele ainda pode ser utilizado quando este sistema é ampliado para incluir as ordens menores que a unidade (décimos, centésimos, etc). Aos poucos, você deve incentivar seus alunos a não necessitar sempre do apoio de materiais concretos, mas tais recursos serão úteis toda vez que for introduzida uma nova ordem decimal, ou quando os alunos demonstrarem dificuldades na compreensão do valor posicional de um algarismo e, principalmente, para construir procedimentos de cálculo.

ESCUTE SEU ALUNO

Primeira Escuta

Uma professora pediu que os alunos escrevessem o número 18 (ditado de números) e, em seguida, perguntou aos seus alunos: "O que você sabe sobre esse número?" . Eis a resposta dada por um aluno:

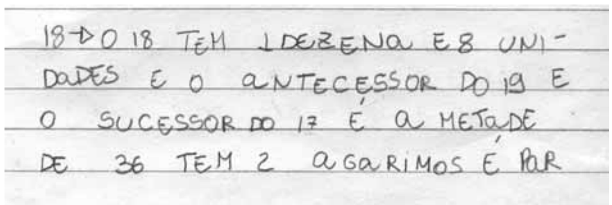

18
.Ele tem 2 algarismos
.Ele é par
.O 18 é antecessor do 19
.Se trocar 8 e o 1 dá 81
.O 18 é o sucessor do 17

Esta resposta nos dá indícios sobre alguns dos conhecimentos deste aluno:

• Ele é capaz de aplicar os conceitos de sucessor e antecessor (que são diretamente relacionados à ordem dos números, pois exploram a idéia de um a mais e um a menos);

• o valor posicional dos algarismos também já começa a ser percebido, pois ele observa que se trocar os algarismos de lugar, vai obter um valor diferente.

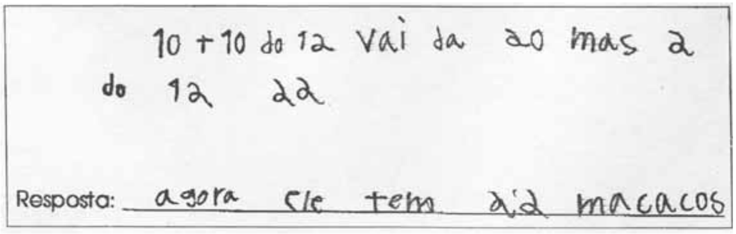
Uma criança que já teve um maior contato com os números é capaz de fazer relações mais complexas. Por exemplo:


18→O 18 TEM 1 DEZENA E 8 UNI-
DADES E O ANTECESSOR DO 19 E
O SUCESSOR DO 17 É A METADE
DE 36 TEM 2 AGARIMOS É PAR

Em sua resposta, este aluno demonstra que já possui o conceito de unidade e dezena, e que as reconhece em números de dois algarismos. Também já demonstra conhecimento acerca do conceito de metade.

Segunda Escuta

Diante do desafio de resolver o problema: *"O doutor Quaresma recebeu dez macacos em uma semana e mais doze na semana seguinte. Quantos macacos ele recebeu?"*, um aluno respondeu:



10 + 10 do 12 vai da 20 mas 2 do 12 22

Resposta: agora ele tem 22 macacos

A estratégia deste aluno foi:
$10 + 10 = 20$
(somou os 10 macacos iniciais com 10 dos 12 macacos)
$20 + 2 = 22$
(somou os 20 macacos que obteve com os 2 que ainda restaram dos 12)

A estratégia pessoal (e correta) que este aluno utiliza para resolver o problema mostra que:

• Ele está ciente de que podemos decompor os números, sem alterar o seu valor. Assim, ele decompõe 12 em 10 mais 2.

• Ao decompor o 12, o aluno revela também que já compreendeu que o algarismo 1 na ordem das dezenas do número 12 representa 10 unidades.

Ainda vale a pena observar que este aluno parece estar em um estágio inicial de aquisição dos símbolos matemáticos. Isso, no entanto, não o impede de pensar corretamente e de deixar "claro" o seu pensamento no papel. Neste estágio, precisamos ficar menos preocupados com a utilização da linguagem correta para que nossos alunos se sintam à vontade e tenham oportunidade de expressar suas formas de raciocínio!

LEMBRE-SE É muito importante trabalhar com as crianças a complexidade do sistema de numeração, entendendo, porém, que essa construção é longa e passará por várias redefinições por parte das crianças. É necessário permitir que seus alunos reflitam sobre as regularidades dos agrupamentos feitos para que possam entender as regras do sistema e generalizá-las para as demais ordens ou casas decimais. Ajuda muito se os alunos tiveram oportunidade de usar os números em contextos significativos para eles.

Durante todas as etapas da construção do sistema de numeração, o aluno deve vivenciar atividades envolvendo leitura, escrita, comparação e ordenação. Deve ainda iniciar o trabalho de operar com números já conhecidos, aprofundando o conceito de cada uma operações, paralelamente ao enriquecimento do sistema de numeração.

ATIVIDADES PARA O PROFESSOR

1. Contando Casos: faça um pequeno relato sobre uma experiência com seus alunos relacionada aos temas discutidos nesta aula.

2. Explique por que é errado dizer que o número 28 tem 8 unidades. Quantas unidades tem o número 28? Qual é o significado correto para o algarismo 8, que ocupa a casa das unidades em 28?

3. Usando recursos didáticos explorados neste capítulo (ou outros, como quantias em dinheiro, por exemplo) desenvolva uma estratégia para convencer seus alunos que no número 17 há 17 unidades e não apenas 7 unidades.

4. Explique por que é errado dizer que o número 234 tem 3 dezenas. Quantas dezenas tem o número 234? Qual é o significado correto para o algarismo 3, que ocupa a casa das dezenas em 234?

5. Usando recursos didáticos, desenvolva uma estratégia para convencer seus alunos que no número 103 há 10 dezenas, e não zero dezenas.

6. A professora pediu que três alunos, Ana, Paulo e Yuriko escrevessem o número duzentos e trinta e cinco. Eis o que as crianças escreveram:

Ana	Paulo	Yuriko
200305	20035	235

Explique o provável raciocínio desenvolvido por cada um deles ao realizar a tarefa.

7. A interação entre alunos, com a supervisão do professor, é uma importante estratégia de ensino. Imagine, por exemplo, que um aluno comente “tem muitos zeros” ao olhar a representação feita por Ana e que outro aluno comente “é muito grande” ao olhar a representação feita por Paulo apresentadas no exercício anterior.

(a) Você acha que a intervenção destes colegas pode ajudar Ana e Paulo? Como? Por quê?

(b) Planeje uma atividade usando um recurso didático para ajudar Ana e Paulo.

AULA 4

AÇÕES ASSOCIADAS ÀS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO.

OBJETIVOS DESTA AULA

- Propor atividades que favoreçam a conceituação de adição e subtração.
- Conceituar uma destas operações como inversa da outra.

TEXTO PARA LEITURA

A conceituação da operação de adição serve de base para boa parte de aprendizagens futuras em Matemática. A criança deve passar por várias experiências concretas envolvendo o conceito da adição para que ela possa interiorizá-lo e transferi-lo na aprendizagem do algoritmo, que vem a ser um mecanismo de cálculo. Ao realizar o algoritmo, a criança esquematiza a adição no plano abstrato e em situações-problema.

A conceituação da operação de subtração é feita paralelamente, já que em atividades concretas a exploração dos dois tipos de conceitos é muito natural. Além disso, não podemos deixar escapar a oportunidade que o aluno tem de ver, na prática, que a subtração e a adição são operações inversas. Por exemplo, quando reúne objetos para desenvolver o significado da adição, a criança sente que pode também separá-los. Assim, ela vê que se $4 + 1 = 5$, logo $5 – 1 = 4$.

Tanto o sucesso como o fracasso, no início do trabalho com experiências de adição e subtração, vão refletir-se em todo aprendizado futuro da Matemática. Dos conceitos básicos destas operações dependem outras aprendizagens, tais como: a conceituação da multiplicação como adição de parcelas iguais; a conceituação da divisão como subtrações sucessivas; o algoritmo da multiplicação, quando adicionamos os produtos parciais para obtermos o produto total; o algoritmo da divisão, quando usamos a adição para verificarmos a exatidão da subtração e vice-versa.

A criança já adquire experiências de adição quando desenvolve o conceito de número. Ela verifica, por exemplo, que pode arrumar cinco palitos como “quatro e um” ou “três e dois”. Tais experiências são renovadas e enriquecidas, para que a criança possa registrá-las mais tarde, em linguagem matemática como: $4 + 1 = 5$ e $3 + 2 = 5$. O professor terá de oferecer inúmeras oportunidades concretas para que a criança comece a exprimir experiências em linguagem matemática. Assim, quando ela escreve 4 + 3 = 7, esta ação deve refletir uma experiência e não uma simples informação transmitida pelo professor.

A adição corresponde sempre a dois tipos de ação: juntar (ou reunir) ou então acrescentar, enquanto a subtração corresponde às ações de: retirar, comparar ou completar. É muito importante que as crianças vivenciem experiências envolvendo todos estes tipos de ação. A dificuldade que os alunos sentem na resolução de problemas, expressada muitas vezes pela pergunta "que conta devo fazer?", é causada, principalmente, pela falta de experiências concretas variadas.

Vejamos alguns problemas, usualmente propostos pelos professores, que exemplificam os diferentes tipos de ação citados.

Cuide para que todas estas diferentes ações estejam presentes em problemas que você aplica.

Juntar

• Sobre a mesa há 5 livros e no armário há mais 2. Reunindo todos os livros numa só prateleira, quantos livros teremos lá?

Acrescentar

• Há 6 alunos na janela. Se chegarem mais 3, quantos alunos ficarão na janela?

Retirar

• Quantos alunos estudam nesta turma? (   ) Se faltassem 4 alunos, quantos ficariam?

Comparar

• João tem 7 anos e Maria 5 anos. Quantos anos João tem a mais que Maria?

Completar

• Preciso descascar 9 laranjas. Já descasquei 5. Quantas laranjas preciso ainda descascar para completar o trabalho?

Note que se o aluno não tiver tido oportunidade de realizar várias atividades envolvendo cada um dos tipos de ação, quando lhe for apresentado um problema que esteja relacionado com uma ação diferente daquela com a qual trabalhou, a dificuldade na determinação da operação a ser realizada será muito natural.

As sugestões apresentadas visam incentivar a exploração concreta das ações associadas às operações de adição e subtração.

SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Atividades que envolvem a ação de juntar

Utilize materiais concretos como chapinhas, palitos, botões, grãos e pedrinhas e uma folha de papel para cada aluno, onde estão desenhados três círculos de cores diferentes (azul, vermelho e verde, por exemplo). Peça às crianças que coloquem no círculo vermelho 3 lápis e no círculo azul, 2. Feito isto, peça que juntem, no círculo verde todos os lápis e pergunte: "quantos lápis estão reunidos no círculo verde?".

Usando materiais concretos como lápis, por exemplo, a criança brinca de juntar elementos.

Repita esta atividade várias vezes, alterando a quantidade de objetos e a forma de apresentação; por exemplo, utilize caixas ao invés de círculos ou gravuras no flanelógrafo.

É bastante comum que as crianças gostem de atividades lúdicas, e o professor pode aproveitar este gosto para criar jogos que envolvam os conceitos a serem trabalhados. Veja este outro exemplo, batizado de "jogo de esconder".

Distribua 9 objetos do mesmo tipo para cada dupla de alunos. Diga às crianças que o jogo tem as seguintes regras:

a) um aluno apresenta ao seu colega uma certa quantidade de fichas (ou o objeto que estiver sendo utilizando) arrumadas em dois grupos – as fichas não utilizadas permanecem escondidas da vista do outro jogador.

b) Depois que o colega observar, junta as fichas e cobre-as com uma folha de papel.

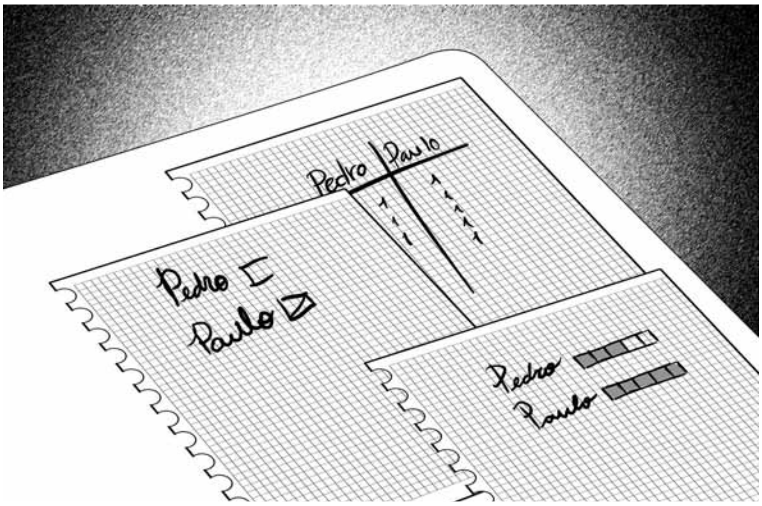
c) O aluno que joga deve dizer o total de fichas que ficou embaixo da folha.

d) Em seguida, os dois alunos levantam a folha e conferem o resultado. Para cada resultado correto será marcado um ponto para o jogador.

e) A turma faz 10 jogadas, revezando sempre o aluno jogador. Depois os pontos são contados para se determinar o vencedor da partida.

Para além das fronteiras

Observe que a atividade acima oferece uma boa oportunidade para desenvolver hábitos de registro e leitura de dados. Os alunos podem registrar em uma folha de papel os pontos obtidos por cada participante. Vários formatos podem ser usados. Alguns estão exemplificado na figura abaixo



Atividades que envolvem a ação de acrescentar

Aproveite todas as situações que ocorrem na sala de aula. Digamos que três alunos estão trabalhando em uma pintura de um mural, e mais dois alunos se juntam a eles. Registre o fato e pergunte: "quantos alunos estão pintando agora?"

A criança participa ativamente da construção do conceito da adição.

Além de fazer uso de situações espontâneas, o professor pode propor atividades utilizando material concreto. Pode utilizar uma caixa para cada aluno ou grupo de alunos (no máximo 4) e alguns objetos simples como fichas, pedrinhas ou conchinhas. Por exemplo: peça que coloquem 2 pedrinhas dentro da caixa e, a seguir, que acrescentem mais 4 pedrinhas. Pergunte quantas pedrinhas há na caixa. Repita esta atividade, variando as quantidades, o material utilizado e a forma de apresentação.

Outra forma interessante de trabalhar é contar histórias, usando, por exemplo, flanelogravuras. Por exemplo: "Havia 5 patinhos no lago". Peça que um aluno venha à frente e prenda cinco patinhos no flanelógrafo, de forma que as outras crianças acompanhem a tarefa. Continue contando: "Chegaram mais dois patinhos". Outro aluno deve fazer a ação de acrescentar os novos patinhos ao flanelógrafo. Pergunte então, no final: "quantos patinhos estão agora no lago?".

Atividades que envolvem a ação de retirar

Usando o mesmo material adotado em atividades anteriores, proponha que um aluno "coloque 5 borrachas dentro da caixa". Depois, peça que ele "retire 3" e que ao final "verifique quantas ficaram na caixa".

Forme, na frente da turma, uma fila de crianças (até 9). Peça a uma criança, que não esteja na fila, que observe a quantidade de crianças na fila e depois vire de costas. Sem falar, retire alguns alunos da fila e diga à criança de costas que se vire. Em seguida, pergunte:

- *"Quantos alunos havia na fila?"*

- *"Quantos alunos ainda ficaram?"*

- *"Quantos saíram?"*

Repita a atividade com outros alunos, sempre mudando o número de alunos da fila.

Atividades que envolvem a ação de comparar

A situação de *comparação* é muito comum no dia-a-dia, e a criança deve compreender PORQUÊ a subtração é a operação que leva ao resultado correto. Isso, a primeira vista, não é muito natural.

A ação de *comparar* não é do mesmo tipo que a ação de retirar, que foi estudada antes. Considerando o grupo original dado, na ação de retirar, uma parte era subtraída para se encontrar o resto. No entanto, numa ação comparativa como "Marcos tem 5 lápis e 2 canetas. Quantos lápis ele tem a mais do que canetas?", as duas canetas não podem ser retiradas do conjunto de 5 lápis. Surge, então, a seguinte questão: "Que método de manipulação de objetos conduzirá a criança a relacionar a subtração com ações comparativas?".

Lembra quando estudamos, anteriormente, atividades que preparam para a aquisição do conceito de desigualdade de cardinais? Pois é lá que está a resposta para a nossa pergunta. É através do *emparelhamento* de objetos que a criança fará suas primeiras comparações. Colocando os elementos dos dois conjuntos, lado a lado, até que todos os elementos de um dos conjuntos tenham sido utilizados, a criança verá que ao separar ou retirar os elementos do conjunto maior, que tiveram elementos correspondentes no conjunto menor, ele estará determinando o número de elementos do resto, e que esta ação corresponde a determinação de quantos elementos a mais existem.

Dessa forma, estaremos subtraindo elementos de um mesmo conjunto. Do total de 5 lápis (conjunto maior), retiramos 2 lápis, que foram emparelhados com as 2 canetas. Sobraram 3 lápis. Este resultado diz "quantos a mais" há no conjunto maior. Vemos, então, que atividades de fazer correspondência um-a-um servem para determinar quantos elementos do conjunto maior devem ser subtraídos, porque tiveram elementos correspondentes no conjunto menor.

A criança emparelha objetos e compara quantidades, ampliando o conceito de subtração.

Utilize materiais diferenciados e proporcione muitas atividades de emparelhar objetos. Somente quando você perceber que a relação da ação de comparação com a subtração foi compreendida e está sendo corretamente utilizada, é que você poderá partir para generalizações, trabalhando com comparações nas quais os alunos não possam dispor os elementos dos dois conjuntos lado-a-lado. Nesse caso, trabalhe com comparação de conjuntos com uma grande quantidade de elementos, como, por exemplo, o número de habitantes de dois Estados.

Atividades que envolvem a ação de completar

Para a criança, a utilização da subtração em situações de *completar* é ainda mais difícil. Quando precisamos descobrir quantos elementos faltam para completar um conjunto de objetos, a ação de *completar* está intimamente relacionada à ação de *acrescentar*. No entanto, a operação realizada é a subtração, e as crianças devem ser ajudadas a compreender PORQUÊ se usa a subtração para resolver esse tipo de situação, a qual uma idéia aditiva está associada.

Quando o problema é resolvido concretamente, é possível determinar o número de objetos procurados, acrescentando-os, um a um, até se obter a quantidade necessária. Tais atividades envolvem, inicialmente, o emparelhamento dos objetos, como fizemos na comparação, substituindo a pergunta "quantos a mais" por "quantos mais são necessários".

Aqui, para compreender que a subtração resolve esse tipo de situação-problema, o aluno deve ser levado a visualizar a quantidade total necessária e a retirada do que já tem deste total. Separando o conjunto de objetos disponíveis do total necessário, o aluno verá porque subtrai para encontrar a resposta.

Além de atividades envolvendo manipulação de materiais, nas quais o aluno, após o emparelhamento, lança mão de mais objetos para que os conjuntos comparados tenham a mesma quantidade de elementos, sugerimos a seguir algumas outras:

Os alunos completam conjuntos de figuras.

1. Coloque no flanelógrafo ou sobre a mesa 2 agrupamentos de figuras, sendo que em um dos conjuntos faltam algumas figuras que estão no outro.

Peça a um aluno que complete o segundo grupo, levando-o a responder a seguinte questão: "Quantas figuras você precisou colocar para que as quantidades ficassem iguais?".

A ação de completar pode ser explorada em atividades nas quais os alunos tenham que completar uma tarefa já iniciada. Podemos utilizar, para isto, folhas com desenhos, para colorir ou completar: Veja:

- *"Quantas bolas estão desenhadas?"*

- *"Quantas estão pintadas?"*

- *"Quantas faltam pintar?"*

- *"Pinte as bolas que ainda faltam pintar".*

Maria tem 4 vasos.

- *"Quantos estão plantados?"*

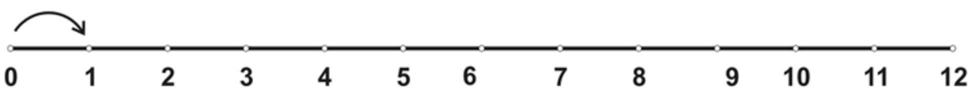
- *"Quantos estão vazios?"*

- *"Complete o trabalho de Maria, desenhando flores nos vasos vazios".*

Os comandos dos exercícios acima podem ser apresentados oralmente e o professor acompanha as respostas dos alunos. Várias atividades deste tipo devem ser propostas.

A reta numérica

Uma exploração da reta numérica através de jogos, também pode ajudar a conceituar as operações de adição e subtração. Se negociarmos com as crianças que o ponto de partida é o ponto 0 e que um passo nos leva para o ponto seguinte, podemos desenvolver diversas atividades utilizando idéias como acrescentar (mais passos), comparar (duas posições), completar (chegar a uma determinada posição adiante).



Esta idéia será mais explorada nas atividades para o professor, propostas ao final do capítulo.

Para além das fronteiras

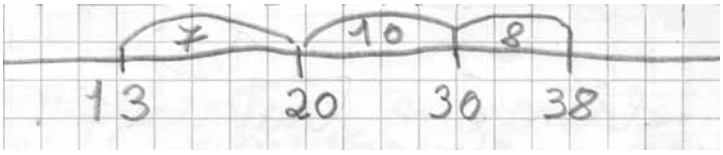
A utilização de sólidos geométricos ou figuras planas representando círculos ou diferentes polígonos pode ser feita nas adaptações de muitas das atividades propostas neste capítulo. Nesse caso, o professor estará familiarizando os alunos com estas formas, além de poder aproveitar a oportunidade para nomear corretamente as figuras (cilindros, cubos, quadrados, triângulos, etc.). Não é recomendável, no entanto, que o professor insista para que as crianças usem a terminologia correta nesta fase de aprendizado. Isto virá naturalmente mais adiante, com o aumento da familiaridade com as formas geométricas e a utilização coerente da nomenclatura pelo professor.

ESCUTE SEU ALUNO

Quando incentivadas por seu professor, as crianças costumam se apropriar da reta numérica com facilidade e usá-la como apoio na resolução de problemas, ajudando a demonstrar sua forma de pensar. A utilização deste modelo por crianças nas séries iniciais é muito rica. É importante observar que, para usar a reta como apoio na resolução de problemas, muitas vezes não é preciso reproduzir fielmente todas as suas características, mas apenas aquelas que são relevantes para a solução. Com tempo e prática, as crianças vão se apercebendo disso, como podemos ver nos exemplos abaixo:

Primeira Escuta

Diante do problema: *"Flavia tem 38 anos e sua filha, Duda, tem 13. Quantos anos a filha de Flavia tem a menos que ela?"*, Clara apresentou esta solução:



Em seguida, Clara adicionou os valores 7, 10 e 8, obtendo 25 – a resposta correta.

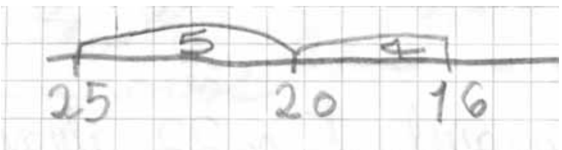
Veja que Clara demonstra segurança em utilizar a reta numérica como apoio ao seu raciocínio. Ela já não tem necessidade de desenhar todos os números a partir do zero e marca apenas aqueles que são relevantes para a SUA solução. O raciocínio utilizado por Clara está muito bem demonstrado e registrado, mesmo não tendo desenhado intervalos unitários iguais.

Observe também que, embora o texto traga uma idéia comparação, Clara usa a idéia de completar em sua resolução (esta é uma idéia aditiva, pois ela representa o valor que deve ser adicionado a 13 para ter como resultado 38).

Quando questionada, ela disse que partiu do 13 porque *"quem tem* 38 *tem* 13*"*, e que precisa saber quanto "38 *é a mais que* 13". Para isso, ela usa uma estratégia pessoal: chegar ao 20 – dezena exata mais próxima (andando 7), depois ao 30 – próxima dezena exata (andando 10) e, finalmente, ao 38 (andando 8). Finalmente, Clara adiciona esses valores (ação sugerida pelo próprio modelo) – e conclui que "38 *é* 25 *a mais que* 13".

Segunda Escuta

Para resolver o problema "Lucia saiu de casa com R$ 25,00 em sua carteira. Passou na banca de jornal e na quitanda. Ao chegar em casa verificou que só havia R$ 16,00 em sua carteira. De quanto foi a despesa de Lucia?", Joaquim usou a seguinte estratégia:



A situação sugere a ação de retirar e, portanto, uma subtração para se chegar ao resultado. Joaquim faz a subtração apoiando-se no modelo da reta numérica. Note, porém, que ele INVERTE o sentido da reta (o maior valor é colocado mais à esquerda) – o que parece indicar que ele percebe que o sentido da reta pode ser escolhido sem prejudicar o modelo, desde que a ordem numérica seja respeitada.

A inversão do sentido da reta por Joaquim pode estar associada com nosso sistema de escrita (da esquerda para a direita). Assim, para contar uma história, seja em língua materna ou em um problema matemático, Joaquim segue a mesma estrutura de organização no papel: o ponto de partida na esquerda e o ponto de chegada na direita.

Embora muitos adultos, incluindo professores preocupados com o desenvolvimento das estruturas formais, pudessem questionar esta inversão e até considerá-la um equívoco, isso não parece ser um problema para Joaquim, que mostra ter compreendido bem o problema. Ele retira 5 do 25, chegando ao 20 – dezena mais próxima, e continua retirando 4, para chegar ao 16 – sempre se movendo da esquerda para a direita. Em seguida, Joaquim adiciona 5 e 4 (ação que é sugerida pelo próprio modelo), chegando ao resultado correto.

LEMBRE-SE

Esse momento – de preparar a criança para a adição e a subtração – é de fundamental importância. Todas as atividades aqui propostas devem ser vivenciadas, concretamente, pela criança, até que você perceba que ela está compreendendo realmente os conceitos das operações. Então você verá como ela vai sentir-se segura e como tudo isso vai facilitar o aprendizado da Matemática, nos estágios seguintes.

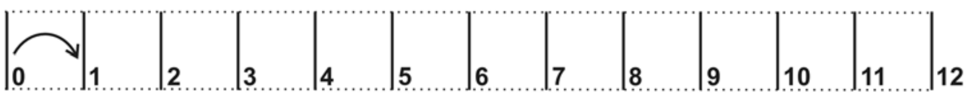
ATIVIDADES PARA O PROFESSOR

1. Contando Casos: faça um pequeno relato sobre uma experiência com seus alunos relacionada com os temas discutidos nesta aula.

2. Crie uma atividade, que pode ser desenvolvida com seus alunos, para cada tipo de ação associado a operação de adição.

3. Crie uma atividade, que pode ser desenvolvida com seus alunos, para cada tipo de ação associado a operação de subtração.

4. *"PISE NA LINHA"*: Elabore atividades (jogos) para seus alunos pisarem nas linhas, utilizando uma faixa de papel (ou várias), como a ilustrada abaixo. Estas atividades devem colaborar para a conceituação das operações de adição e de subtração. Repare que o "pisar na linha" reproduz, usando uma faixa, o modelo da reta numérica.



5. Caso você quisesse utilizar a faixa dos jogos de PISE na LINHA para uma atividade que se assemelhasse ao modelo de *retirar* para a operação de subtração, o significado de "retirar" teria de ser negociado com seus alunos. Se no jogo acrescentar significa avançar, qual deve ser o significado de retirar? Elabore uma atividade utilizando esta idéia.

AULA 5

PREPARAÇÃO PARA EFETUAR A ADIÇÃO E A SUBTRAÇÃO

OBJETIVOS DESTA AULA

- Identificar a importância da apreensão dos fatos básicos da adição e da subtração no aprendizado de tais operações e de seus algoritmos.

- Identificar a importância da habilidade de decompor um número de diversas maneiras diferentes no aprendizado de tais operações e de seus algoritmos.

- Propor atividades de manipulação concreta para compreensão das propriedades da adição e da subtração.

TEXTO PARA LEITURA

Na aula anterior, apresentamos um conjunto de atividades em que o objetivo principal era a compreensão pelas crianças dos conceitos da adição e da subtração. Realizando atividades como as propostas, ligadas às ações de juntar, acrescentar, retirar, comparar e completar, os alunos estarão aprendendo, simultaneamente, os fatos básicos dessas duas operações.

Mas o que é *fato básico*?

Quando numa operação empregamos números de um só algarismo, estamos diante de um *fato básico*. Em outras palavras, os fatos básicos são os cálculos de uma determinada operação que deve ser feitos mentalmente, sem o auxílio do algoritmo.

A ordem da apresentação dos fatos básicos é muito importante. De maneira geral, é aconselhável que, inicialmente, a criança estude os fatos com somas e minuendos até 9, trabalhando com um total de cada vez. Por exemplo, a criança estuda todos os fatos da adição de soma 5, registrando as seguintes experiências: $1 + 4 = 5$; $2 + 3 = 5$; $3 + 2 = 5$; $4 + 1 = 5$ – e fatos da subtração com minuendo 5, ou seja, $5 – 1 = 4$; $5 – 2 = 3$; $5 – 3 = 2$; $5 – 4 = 1$. Estes dois são aprendidos como um conjunto de fatos relacionados, isto é, quando a criança aprende que $1 + 4 = 5$, aprende também que $5 – 4 = 1$.

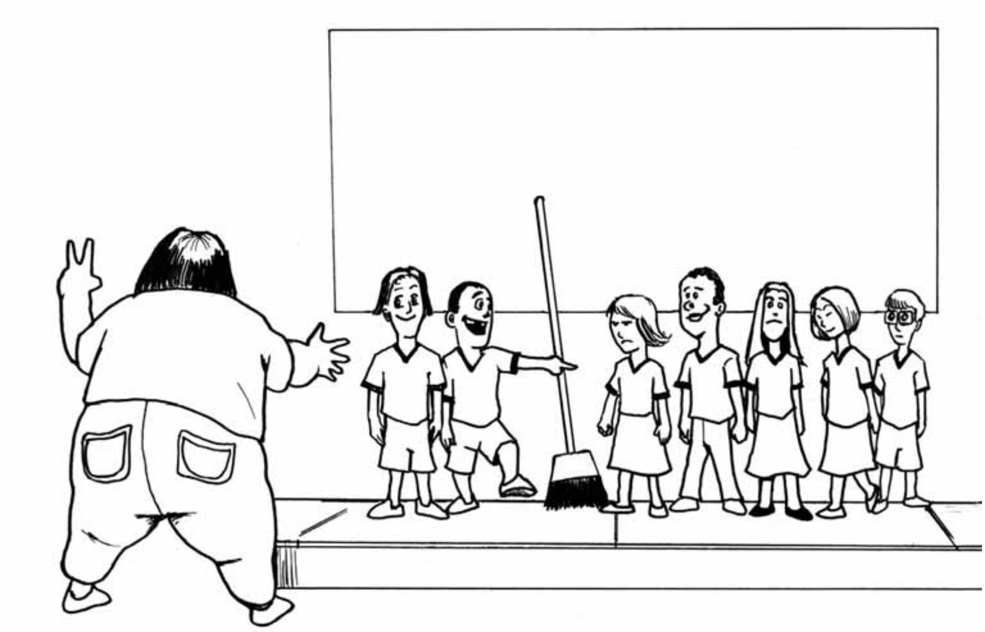
SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Nas sugestões abaixo, destacaremos a preparação do aluno para compor e decompor quantidades. Estas habilidades serão fundamentais para o bom desempenho nas operações de adição e subtração.

Atividades que levam à decomposição de números usando a adição

Além das atividades envolvendo as ações de juntar e acrescentar, é necessário, para que os alunos construam os fatos básicos da adição, você realizar outras atividades que levam à decomposição de números, usando a adição. São exercícios que estão, também, ligados diretamente à construção do conceito de número. Veja um exemplo:

Forme na frente da turma uma fila com 7 crianças. Usando uma vassoura, peça às crianças que apontem as diferentes maneiras de a vassoura "furar a fila".



As crianças brincam e aprendem.

No quadro, desenha-se a tabela abaixo. À medida que cada solução é apontada pelas crianças faz-se um registro na tabela. É necessário indicar o início da fila, para poder usar as expressões "antes da vassoura" e "depois da vassoura".

Antes da vassoura	Depois da vassoura	Total de Crianças
3	4	7
2	5	7
...	...	
...	...	

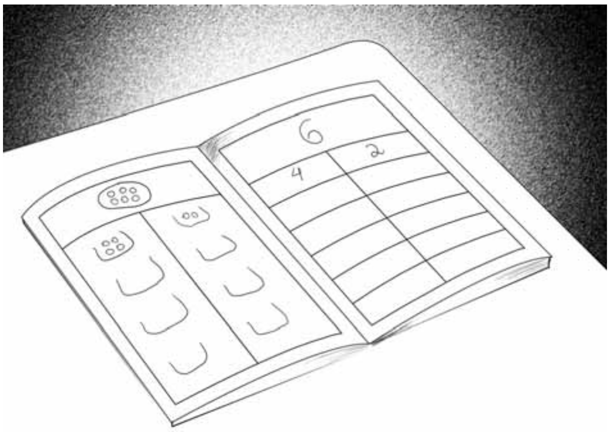
Para além das fronteiras

Observe que esta atividade, assim como outras propostas a seguir, oferecem boas oportunidades para continuar o desenvolvimento de hábitos de registro e leitura de dados. No exemplo anterior, estamos explorando a organização de dados em tabelas, um formato muito utilizado nos meios de comunicação e em diversas situações do cotidiano.

Conte histórias e utilize material concreto para que os alunos, ao manipulá-lo, observem que uma mesma quantidade pode ser arrumada de várias maneiras. Estas atividades, como a anterior, levam às várias representações de uma quantidade, usando a adição, ou seja, levam à decomposição de um número.

O registro das experiências concretas é etapa importante na aprendizagem.

Apresentamos uma história que serve como exemplo para o professor utilizar e criar várias outras semelhantes que, numa primeira fase, serão apresentadas oralmente. Este tipo de atividade é também uma preparação para a resolução de problemas. Após a criança dominar o conceito da operação e seus fatos básicos e quando puder ler e interpretar pequenos textos, podemos propor-lhe as mesmas histórias por escrito. Veja:



"João ganhou 6 bolas de gude e tem 2 bolsos para guardá-las. Mostre as várias maneiras que ele tem de guardar as 6 bolas nos bolsos".

O aluno representa as diferentes decomposições, usando material concreto, e registra suas experiências num quadro, que pode ser apresentado em folha de atividade.

Atividades para introduzir os fatos básicos da subtração

Utilizando os dedos da mão, podemos trabalhar os fatos básicos da subtração com minuendo 5. Proponha uma brincadeira como a apresentada a seguir, que está diretamente relacionada com a ação de retirar, vista na aula 4.

Minha mão tem _____ dedos

Escondendo 1, ficam _______ dedos

Escondendo 2, ficam _______ dedos

Escondendo 3, ficam _______ dedos

Escondendo 4, fica _______ dedo

O professor poderá ir registrando os resultados, com o auxílio das crianças.

Da mesma forma, podemos trabalhar os fatos básicos de minuendo igual a 10, utilizando as duas mãos.

Normalmente, é um pouco mais tarde – quando a criança já assimilou bem a primeira etapa – que se desenvolve o estudo dos fatos com somas e minuendos até 18. O estudo destes fatos básicos deve ser feito da mesma forma que o estudo feito até 9, ou seja, através de atividades concretas, para que os alunos venham a registrar matematicamente cada fato básico como resultado de suas experiências.

É importante, também, relacionar os fatos básicos da adição com os da subtração. Isto irá reforçar a idéia intuitiva de operações inversas, que o aluno deve estar desenvolvendo.

Preparando para o algoritmo

Antes do aprendizado do algoritmo, que possibilitará à criança um método de cálculo que pode ser aplicado na resolução de qualquer situação-problema, ela viverá uma preparação que envolve basicamente três fases. Na primeira, ela manuseia objetos, trabalhando apenas o conceito, de forma que a terminologia adequada vá sendo assimilada aos poucos. Ela realiza, por exemplo, atividades de juntar e acrescentar, e nessas ocasiões o professor deve levá-la a associar tais ações à palavra "mais".

Após essa primeira fase, quando as crianças compreendem as ações e já estão operando espontaneamente, a *palavra* "mais" deve ser associada ao *sinal* "mais" (+), no sentido de representar matematicamente o que já fazem de forma concreta.

A terceira dessas fases gerais é a memorização dos fatos básicos, apreendidos e simbolizados, o que é fundamental para o bom desempenho na aprendizagem do algoritmo.

A valorização do cálculo mental

Conhecer bem os fatos básicos é ser capaz de fazer contas mentalmente, já que o algoritmo não nos ajuda a obter os resultados nestes casos. É bom usar diversos modelos concretos que apóiem o aluno a desenvolver estratégias para obter resultados e chegar a memorização dos fatos básicos. Assim sendo, é importante que você esteja atento ao trabalho de seus alunos neste estágio, que valorize suas tentativas, e que permita registros informais. No entanto, o professor deve encorajar seus alunos a abrir mão destes registros de forma gradual, fazendo perguntas como: Você pode fazer esta conta na sua cabeça, sem escrever?

A habilidade de calcular resultados mentalmente deverá ser desenvolvida em todos os estágios do aprendizado de número. Mais adiante, muitas vezes, não é necessário obter o valor exato mentalmente, mas o cálculo mental nos permite fazer estimativas que ajudam a identificar erros em contas. Vamos retornar a este tema diversas vezes durante nosso estudo.

AS PROPRIEDADES DE ADIÇÃO E DA SUBTRAÇÃO

Algumas propriedades da adição e da subtração devem ser trabalhadas com os alunos, porém sem que eles precisem nomeá-las. Nesse momento, o professor deve ter apenas uma preocupação principal: oferecer oportunidades para os alunos observarem que podem ser feitas algumas manipulações interessantes com objetos de contagem. Na verdade, o que o professor faz com os alunos são jogos de arrumação de quantidades, conduzidos de tal forma que as crianças comecem a compreender, informalmente, tais propriedades.

Assim, se a criança sabe que tanto 2 + 3 quanto 3 + 2 representam 5, está usando a propriedade *comutativa* da adição. Esta propriedade, quando percebida pelos alunos, reduz o estudo dos fatos básicos à metade.

Tal propriedade permite, também, que realizemos contas que são, para nós, mais simples. Por exemplo, para obter o resultado de 8 + 9 + 2, podemos utilizar a propriedade comutativa e efetuar a operação 8 + 2 + 9. Como 8 + 2 = 10, o resultado (19) é obtido sem depender do conhecimento do fato básico (8 + 9). Outra de suas aplicações é a verificação do algoritmo da adição: adiciona-se cada coluna no sentido oposto ao usado anteriormente. Assim:

$$\begin{array}{rr} & 16 \\ + & 32 \\ & 41 \\ \hline & 89 \end{array}$$

Somar de baixo para cima e vice-versa, para verificar se o resultado está correto.

O aluno estará usando a propriedade associativa da adição, quando notar que reunir ou somar 4 + 1 + 2 é o mesmo que: (4 + 1) + 2 = 5 + 2 ou ainda: 4 + (1 + 2) = 4 + 3. Esta propriedade auxilia muito na compreensão dos fatos básicos de total maior que 10. Assim, fica mais fácil a criança compreender que:

$$8 + 3 = (4 + 4) + 3$$

$$9 + 4 = (5 + 4) + 4$$

Muitos alunos recorrem às propriedades da adição para obter os resultados de fatos básicos a partir de outros fatos conhecidos. Por exemplo, é possível que um aluno para calcular 8 + 5 recorra a seguinte estratégia mental: 8 + 5 = (8 + 2) + 3 = 10 + 3 = 13. Ao utilizar uma estratégia como esta, o aluno está utilizando diversos conhecimentos: ele se mostra capaz de escolher a conta 8 + 2, pois esta é simples de ser feita; ele se mostra capaz de decompor o 5 em 2 + 3; e ele se mostra capaz de usar corretamente a propriedade associativa da adição, já que modificou a conta 8 + (2 + 3) para (8 + 2) + 3.

O professor deve valorizar tais estratégias, inclusive socializando-as com sua turma, pois isso pode ajudar os alunos com maior dificuldade e que ainda não desenvolveram estratégias básicas próprias. Não é necessário insistir em uma memorização imediata dos fatos básicos. Isto acontecerá naturalmente, à medida que os alunos tiverem a oportunidade de exercitar de forma criativa e interessante os resultados. Deve-se evitar os exercícios repetitivos e insistir em jogos e atividades criativas, que ajudem a memorização dos resultados.

Na verdade, o aluno que for capaz de lidar com os fatos básicos da adição tem tudo para, também, poder lidar com os fatos básicos da subtração, desde que o professor tenha sempre o cuidado de reforçar estas operações como inversas uma da outra. Assim, 13 – 5 = 8, porque 8 + 5 = 13. A subtração como inversa da soma deverá, sempre que possível, ser trabalhada concretamente.

O professor pode levar seus alunos a perceber propriedades da subtração que são importantes para o aprendizado do algoritmo através de perguntas, tais como:

- *"De 7 ovos, quebraram 2.*
Quantos ovos restaram?" (7 – 2 = 5)

- *"Se quebrassem 3 ovos, ficaríamos com mais ou menos ovos?"* (7 – 3 = 4)

- *"Se tivéssemos 9 ovos e também quebrassem 2, ficaríamos com mais ou com menos ovos?"* (9 – 2 = 7)

Através de atividades como esta, o aluno vai percebendo que:

• Quando o minuendo AUMENTA em uma certa quantidade e o subtraendo NÃO SE ALTERA, o resto AUMENTA na mesma quantidade.

$$\begin{array}{r} 25 \\ -\,12 \\ \hline 13 \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{+1} \\ \\ \xrightarrow{+1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 26 \\ -\,12 \\ \hline 14 \end{array}$$

• Quando o minuendo DIMINUI em uma certa quantidade e o subtraendo NÃO SE ALTERA, o resto DIMINUI na mesma quantidade.

$$\begin{array}{r} 25 \\ -\,12 \\ \hline 13 \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{-1} \\ \\ \xrightarrow{-1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \\ -\,12 \\ \hline 12 \end{array}$$

• Quando o minuendo NÃO SE ALTERA e o subtraendo AUMENTA em uma certa quantidade, o resto DIMINUI na mesma quantidade.

$$\begin{array}{r} 25 \\ -\,12 \\ \hline 13 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{+1} \\ \xrightarrow{-1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ -\,13 \\ \hline 12 \end{array}$$

• Quando o minuendo NÃO SE ALTERA e o subtraendo DIMINUI em uma certa quantidade, o resto AUMENTA na mesma quantidade.

$$\begin{array}{r} 25 \\ -\,12 \\ \hline 13 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{-1} \\ \xrightarrow{+1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ -\,11 \\ \hline 13 \end{array}$$

• Quando se AUMENTA ou DIMINUI o minuendo e o subtraendo em uma mesma quantidade, o resto NÃO SE ALTERA.

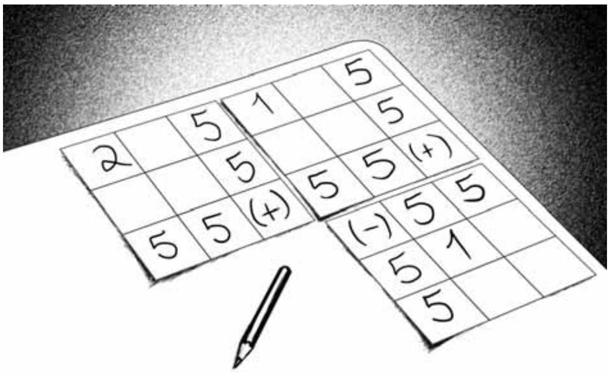
$$\begin{array}{r}25\\-\,12\\\hline 13\end{array} \xrightarrow{+1} \begin{array}{r}26\\-\,13\\\hline 13\end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r}25\\-\,12\\\hline 13\end{array} \xrightarrow{-1} \begin{array}{r}24\\-\,11\\\hline 13\end{array}$$

Muitas crianças passam a conhecer essas propriedades a partir de suas experiências com os fatos básicos. Entretanto, todas elas deveriam adquirir tais conhecimentos desde cedo, já que eles serão úteis em aprendizagens futuras e na resolução de problemas, além de possibilitarem maior habilidade de cálculo. Sendo assim, é necessário que o professor trabalhe estas propriedades através de diferentes atividades.

SUGESTÃO DE ATIVIDADES

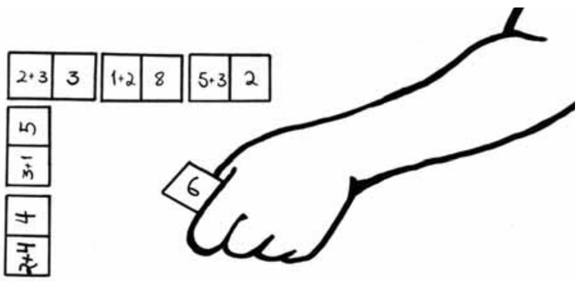
Todas as sugestões feitas abaixo estão voltadas para desenvolver o pensamento matemático dos seus alunos e para ajudá-los na aplicação das propriedades e na memorização dos fatos básicos.

Números cruzados



Usando cartolina, confeccione cartões como os apresentados ao lado e crie as regras dos jogos, que vão facilitar a memorização dos fatos básicos.

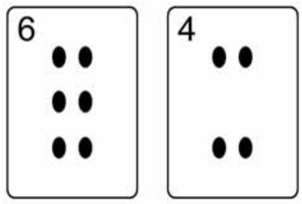
Dominó da adição



Aqui o professor pode confeccionar o material em cartolina. Um primeiro dominó pode incluir apenas os fatos básicos de soma até 5, para as crianças se familiarizarem com o jogo. Um segundo dominó, que inclua todas as somas até 9 terá muito mais peças e pode ser oferecido quando as estratégias de jogo já não oferecerem qualquer dificuldade.

Batalha dupla

Usar cartões com números e figuras ou um baralho (apenas as cartas até 5, no primeiro momento, e até 9 em seguida), dividindo-o entre dois alunos. Cada aluno vira duas cartas ao mesmo tempo, calcula e diz o resultado da adição dos valores de suas duas cartas.



O aluno que acertar o resultado, fica com as 4 cartas abertas na mesa, que devem ser colocadas em um monte separado (as cartas deste monte, de cada aluno, não serão usadas para abrir novas cartas).

Se nenhum dos dois alunos acertar o resultado, as cartas são eliminadas do jogo.

Se ambos acertarem o resultado, aquele que tiver obtido a soma maior fica com as cartas abertas (esta regra pode ser invertida e ganhar quem tem a menor soma).

Ganha o jogo o aluno que tiver o maior monte ao final das partidas.

Adivinhe a carta escondida

Usar cartões com números e figuras ou um baralho (apenas as cartas até 5, no primeiro momento, e até 9 em seguida) dividindo-o entre dois alunos – A e B. Em turnos, o aluno A abre uma carta na mesa e olha a carta seguinte do seu monte, sem mostrá-la a seu colega, o aluno B. Então, A anuncia o resultado da adição do valor das duas cartas – a que está à vista e a que esta virada para baixo - para seu colega B que deve, então, descobrir o valor da carta escondida.

Se A errar o resultado da adição que realizou, ele impediu que B acertasse o resultado. Então, ele perde as cartas para o colega.

Se B errar a resposta, o colega que propôs a adivinhação ganha as cartas, mas se descobrir o valor da carta escondida, ele ganha as duas cartas para o seu monte.

Ganha o aluno que tiver o maior monte ao final do jogo.

Conferindo resultados com a calculadora

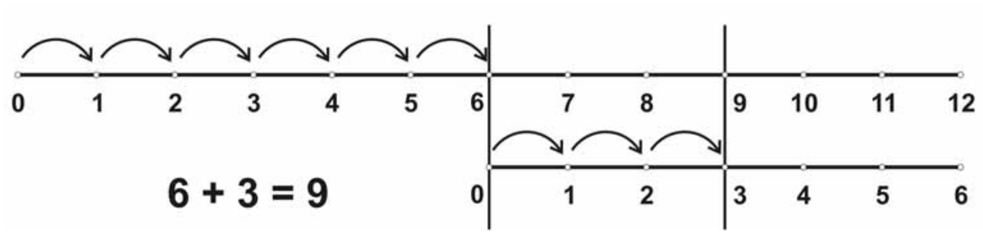
O uso de recursos tecnológicos tem um fator de motivação bem grande para os alunos. Além disso, para preparar nossos alunos para o mundo do trabalho e para o cotidiano do cidadão, é indispensável torná-los aptos a utilizar estes recursos. No caso da calculadora, ela pode contribuir para que o aluno utilize a notação correta nas operações neste estágio inicial, além de permitir a conferência dos resultados obtidos por eles. O fato de que crianças podem errar ao utilizar a calculadora também pode ser explorado para valorizar a habilidade de fazer estimativas e utilizar o cálculo mental. Propomos o seguinte jogo:

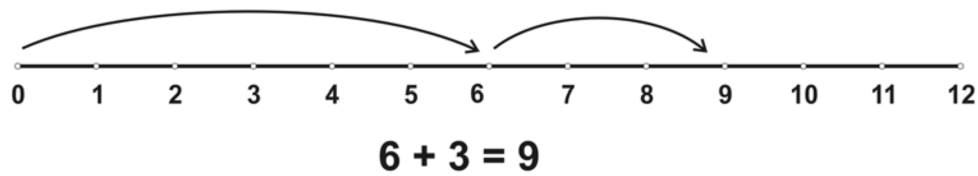
Em turnos alternados, um aluno propõe um fato básico para seu colega. Os dois devem responder a pergunta e, após esta etapa, conferir o resultado usando a calculadora (a conta na calculadora deve ser feita pelo aluno que propôs o desafio). Ganha um ponto quem respondeu corretamente. Se acontecer de a conta ser feita incorretamente na calculadora, ganha 3 pontos quem descobrir este fato.

A reta numérica

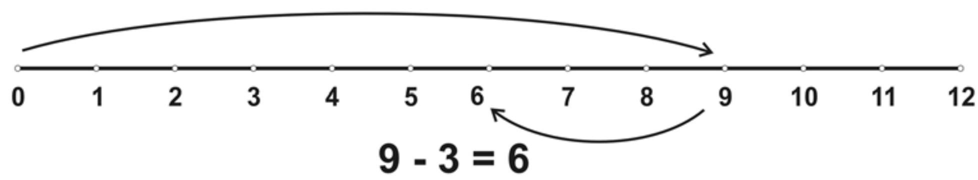
A reta numérica pode, mais uma vez, ser explorada na aquisição de fatos básicos, como ilustrado na figura abaixo. A reta numérica permite boas representações para problemas do tipo: Paulo deu 6 passos e depois deu mais 3. Quantos passos Paulo deu? Também é possível associar a representação de adições na reta ao resultado da adição dos pontos obtidos em dois dados.

As representações dos alunos devem evoluir aos poucos, e diferentes registros são possíveis. Na figura abaixo, exemplificamos duas das diversas possibilidades: o primeiro registro usa o apoio de duas retas numéricas e pulos unitários, enquanto o segundo registro usa pulos de tamanhos variados, e apenas uma reta numérica é utilizada.





Atividades envolvendo retiradas e a reta numérica também podem ser elaboradas, desde que a retirada seja claramente identificada pelos alunos com a idéia de recuar na reta, como ilustrado na figura abaixo.

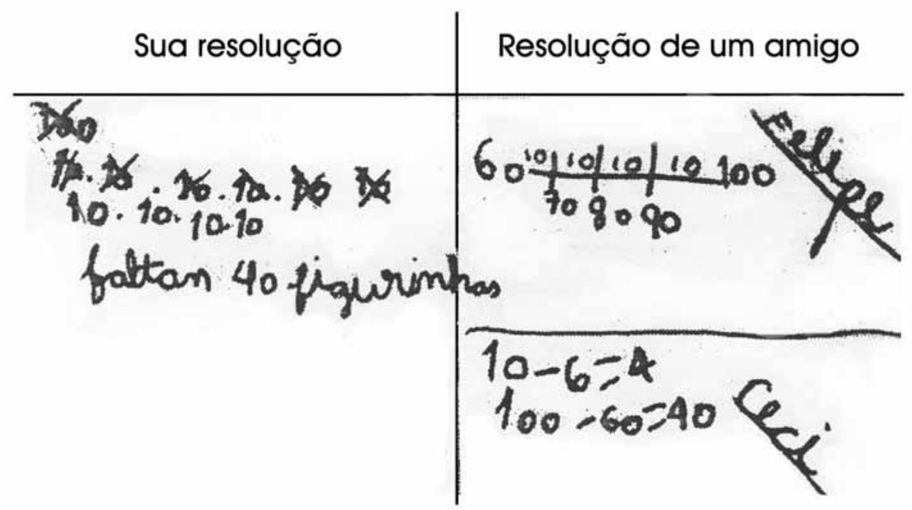


ESCUTE SEU ALUNO

A socialização das resoluções de um problema entre os alunos é uma forma de contribuir para que eles se apropriem de novas estratégias, muitas vezes mais “econômicas” (ou mais avançadas matematicamente) que as suas. Vejamos um exemplo:

A professora combinou com seus alunos que, após a resolução do problema, cada um deles anotaria em sua folha as estratégias utilizadas por mais dois colegas, escolhendo aquelas que lhe parecessem mais interessantes. O problema proposto foi: *“Luiza tem um álbum, no qual precisa colar 100 figurinhas. Ela já colou 60 figurinhas. Quantas ainda faltam?”.*

Veja as anotações feitas por Carolina em sua folha de exercícios:



Observe que a estratégia de Carolina, embora seja a mais primária das três, nos mostra que ela tem conhecimento de que em uma centena há dez dezenas, e que também compreende que 60 representa 6 dezenas. Ela decompõe 100 em 10 dezenas e, a seguir, ela risca (ação de *retirar*) a quantidade de figurinhas que já foi colada, concluindo que ainda faltam 40.

Felipe, por outro lado, apoia sua estratégia de solução na ação de *completar* e modela seu problema na reta numérica. Observe que ele também usa a contagem de dez em dez, partindo de 60 para chegar a 100.

Por sua vez, Ceci desenvolve a solução matematicamente mais avançada e com maior nível de abstração. Ela não mais necessita apoiar sua solução em ações, mas apenas na apropriação dos fatos básicos da subtração (10 – 6 = 4) e em conclusões próprias sobre o comportamento dos números.

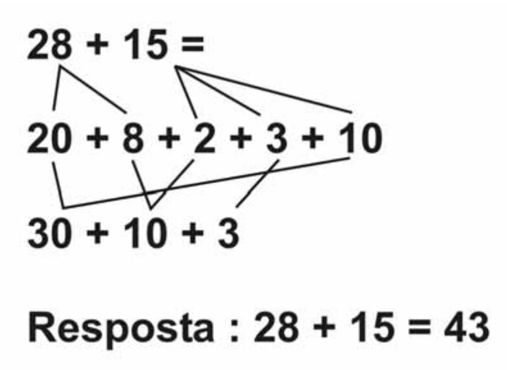
Na verdade, Ceci está aplicando uma regularidade (isto é: um comportamento que se repete) observada na forma que representamos os resultados de multiplicações por 10 no Sistema Decimal de Numeração (para multiplicar por 10, basta acrescentar um zero ao final do número). Ela concluiu este fato a partir de suas experiências e o generalizou (isto é: foi capaz de compreender era sempre válido e que ela podia aplicá-lo em novas situações).

LEMBRE-SE Para que o aluno venha a ser capaz de utilizar bem os algoritmos da adição e da subtração, é necessário não apenas o desenvolvimento de estratégias mentais que lhe permitam utilizar os fatos básicos com segurança, mas também um bom conhecimento das diversas possibilidades para decompor um número. Assim, as atividades propostas aqui são de fundamental importância para a continuidade do desenvolvimento de seus alunos em Matemática.

ATIVIDADES PARA O PROFESSOR

1. Contando Casos: faça um pequeno relato sobre uma experiência com seus alunos relacionada com os temas discutidos nesta aula.

2. Para adicionar 28 + 15, um aluno usou a seguinte estratégia:



Explique o raciocínio desenvolvido pelo aluno, destacando as decomposições e composições efetuadas por ele e as propriedades da adição utilizadas.

3. Utilizando materiais concretos, cartas ou fichas, elabore uma atividade que destaque, para os seus alunos, **duas** dentre as seguintes propriedades da subtração:

(a) Quando o minuendo diminui em uma certa quantidade e não se altera o subtraendo, o resto diminui na mesma quantidade.

(b) Quando o minuendo aumenta em uma certa quantidade e não se altera o subtraendo, o resto aumenta na mesma quantidade.

(c) Quando não se altera o minuendo e o subtraendo aumenta em uma certa quantidade, o resto diminui na mesma quantidade.

(d) Quando não se altera o minuendo e o subtraendo diminui em certa uma quantidade, o resto aumenta na mesma quantidade.

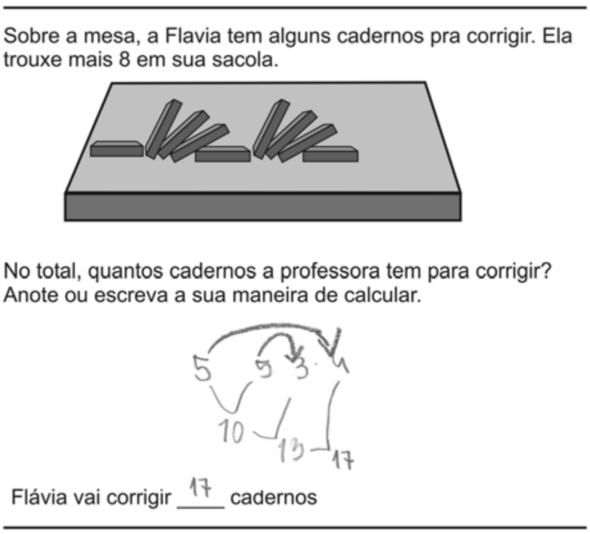
(e) Quando o minuendo e o subtraendo aumentam em uma mesma quantidade, o resto não se altera.

(f) Quando o minuendo e o subtraendo diminuem em uma mesma quantidade, o resto não se altera.

4. As propriedades da subtração destacadas acima também são importantes no desenvolvimento de estratégias para o cálculo mental. Por exemplo: para subtrair 17 de 300, podemos usar a propriedade (c), adicionando 3 ao subtraendo. Obtemos então a subtração 300 – 20 = 280. Como adicionamos 3 ao subtraendo, sabemos que a diferença diminuiu de 3 unidades, que devem ser adicionadas novamente. Logo, a resposta correta para o problema pedido é 283. Para cada uma das propriedades listadas, dê pelo menos dois exemplos nos quais a aplicação da propriedade facilita o cálculo mental necessário para fazer a subtração.

5. A partir do trabalho desenvolvido por seus alunos, dê pelo menos dois exemplos de estratégias (diferentes do uso do algoritmo) utilizadas por eles. Comente se estas estratégias estão corretas, ou se levam o aluno ao erro.

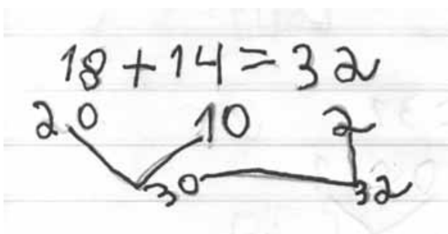
6. Veja a resolução de Marcelo para o problema proposto por sua professora:



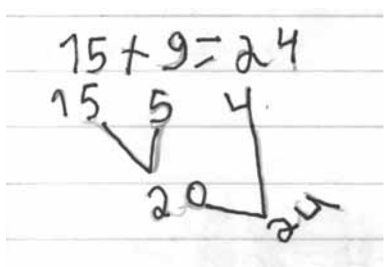
Explique o raciocínio desenvolvido pelo aluno, destacando as decomposições e composições por ele efetuadas.

7. Explique o raciocínio desenvolvido por cada aluno nas adições abaixo, destacando composições, decomposições e propriedades:

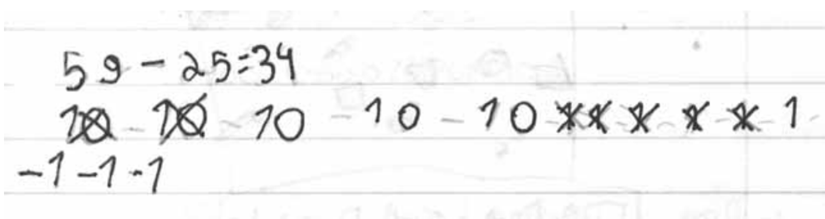
(a)



(b)



8. Explique o raciocínio desenvolvido pelo aluno na subtração abaixo, destacando composições, decomposições e propriedades:



AULA 6

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

OBJETIVOS DESTA AULA

• Reconhecer o que é um problema.

• Identificar a importância da resolução de problemas no ensino da Matemática e na formação do aluno.

•Propor situações que estimulem a resolução de problemas.

TEXTO PARA LEITURA

Vamos considerar como *problema* toda situação que, desafiando a curiosidade, possibilita uma descoberta. Tais situações aparecem freqüentemente em nossa vida diária. Somos desafiados a encontrar soluções para problemas matemáticos ou não, desde os mais simples (como encontrar um objeto perdido) aos mais complexos (como entender fenômenos da natureza, ou compreender uma nova tecnologia).

Em suas vidas, pessoas diferentes precisam resolver problemas diferentes e muito variados. Além disso, nossa sociedade se encontra em permanente evolução, o que não nos permite identificar com clareza quais serão os problemas que nossos alunos virão a enfrentar no futuro. Por tais razões, devemos nos preocupar em desenvolver o gosto pelo trabalho mental independente, de forma a capacitar a criança para a vida.

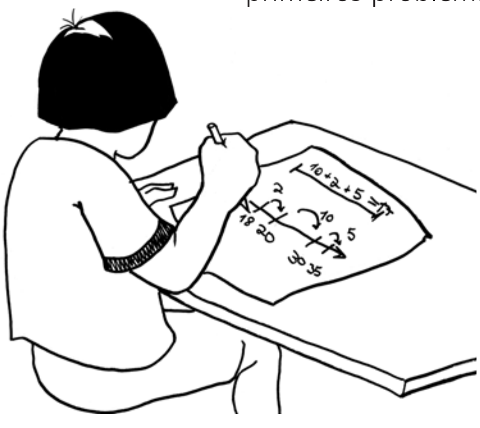
Como conseqüência, a resolução de problemas deve ser encarada de forma bem mais ampla do que um simples treino de problemas-tipo. Por isso, adotamos uma definição de problemas bastante abrangente, que não é compatível com um ensino por adestramento.

Mesmo quando nos referimos apenas a problemas matemáticos, devemos considerar este termo de forma bem ampla. Estamos propondo que problemas não sejam apenas aqueles pequenos enunciados escritos, utilizados como recurso para que os alunos apliquem um procedimento que o professor acabou de mostrar no quadro (e que, muitas vezes, eles não compreenderam). Para nós, resolver problemas é a principal atividade matemática, e ela deve estar sempre presente na sala de aula. É tentando resolver problemas, que novos conceitos começam a ser formados e que surge a percepção da necessidade de ampliar conhecimentos anteriores – gerando o interesse e o gosto de aprender. Estamos propondo acabar com uma estrutura didática que privilegia o treino de procedimentos, sem que o aluno perceba porque eles são necessários.

Os problemas matemáticos não têm sempre como objetivo encontrar uma resposta numérica. Há problemas nos quais se quer, simplesmente, levar a criança a interpretar e analisar os dados, a fazer estimativas numéricas e previsões, ou então a organizar dados de maneira adequada. Problemas que admitem mais de uma solução; problemas que não admitem solução; problemas com dados em excesso, ou dados em falta, que também proporcionam ricos momentos de desenvolvimento para a capacidade de análise dos alunos. Assim, propomos que eles resolvam problemas não apenas como simples aplicação da habilidade de calcular, mas, principalmente, como uma oportunidade de analisar situações, tomar decisões e investigar estratégias. Problemas em Matemática permitem ainda que os alunos apliquem o pensamento quantitativo ou o raciocínio espacial e descubram relações numéricas ou geométricas.

A habilidade de resolver problemas só se desenvolve à medida que a criança os soluciona, da mesma forma que só se aprende a andar tentando, caindo, tentando de novo e treinando. O aluno só chegará a resolver problemas de forma independente, se o professor – sem deixar de auxiliar quando necessário - lhe der múltiplas oportunidades nas quais uma parcela considerável do trabalho seja feita por ele próprio ou em parceria com seus colegas. Quanto mais situações-problema variadas o aluno solucionar, maior também será o seu repertório, o que o auxiliará na elaboração de um plano de trabalho diante de uma situação nova.

É conveniente, no entanto, que haja um desenvolvimento gradual. A criança pode resolver situações-problema simples, mesmo antes de ter sido alfabetizada. Observe, por exemplo, que as atividades apresentadas para a conceituação de números (Aula 2) são, em sua maioria, provenientes de situações-problema que envolvem vivências, manipulações e podem ser apresentadas sob a forma de "historinhas" contadas pelo professor. Atividades como aquelas estão entre os primeiros problemas que devem ser propostos aos alunos.



Mesmo para crianças pequenas, que ainda não sabem ler, podemos aproveitar conversas coletivas sobre as novidades e observações de situações cotidianas contadas pelas crianças para propor problemas e discutir, oralmente, estratégias de resolução. É possível, também, explorar a habilidade de resolução de problemas, diariamente, quando exploramos o calendário e a chamada, a partir da leitura de um livro infantil ou de jogos e brincadeiras,

Quando a criança já é capaz de interpretar pequenos textos, podemos também propor problemas com enunciados escritos. Os textos devem ser curtos e claros, envolvendo de preferência situações que sejam do interesse e da realidade dos alunos e com palavras do vocabulário deles. A dificuldade irá aumentando, conforme forem crescendo as habilidades dos alunos em ler, interpretar e compreender. Também é preciso considerar os avanços da criança na conceituação das operações, no desenvolvimento de estratégias mentais para elaboração de planos de ação, testagem (ensaio e erro), discussão, validação e avaliação de esquemas de ação e ainda na utilização de estratégias de cálculo.

Porém, não podemos esquecer que ao apresentarmos um problema o objetivo não é a cobrança de cálculos complicados ou com números muito grandes, mas sim o desenvolvimento do raciocínio e das habilidades necessárias à realização das etapas de resolução. Desta forma, a resolução de problemas passa a ser um meio para aprender. Ao invés de receber informações passivamente, o aluno tem a oportunidade de investigar e explorar os conceitos e as técnicas da Matemática.

O PAPEL DO PROFESSOR

O professor precisa reconhecer-se no papel de *orientador* junto à criança; ajudá-la a desenvolver o gosto pelo raciocínio independente. Com a resolução de problemas, o professor tem uma grande oportunidade de proporcionar à criança o prazer da descoberta. Experiências bem cuidadas de raciocínio independente e de descobertas levarão a uma postura positiva e otimista diante de uma situação-problema, por toda a vida. Para isso, o papel do professor é fundamental e merece destaque o cuidado com as etapas que descreveremos a seguir.

Planejamento

Cabe ao professor selecionar ou elaborar os problemas que serão propostos às crianças em situações variadas – e ainda ser capaz de aproveitar as oportunidades naturais para propor problemas sobre situações que ocorrem em sala de aula. Existem alguns cuidados na seleção ou confecção de problemas que não podemos esquecer, sendo que o principal é respeitar as possibilidades reais de resolução por parte dos alunos.

Problemas devem explorar idéias e contextos (realidade dos alunos; realidade da escola, do bairro ou da cidade; problemas fomentados por leituras; desafios na exploração de materiais concretos; jogos; e muitos outros) que mobilizem os alunos na busca de soluções e os estimulem a investigar e a rever criticamente suas respostas. Os enunciados devem ser claros e não muito longos, conter palavras do vocabulário do aluno, ou então palavras exploradas em sala de aula. A dificuldade dos alunos em resolver um problema pode estar relacionada à compreensão do enunciado – muitas vezes mal escrito, longo e confuso – daí a necessidade de se ter muito cuidado na seleção e na redação de um problema.

Em especial nas quatro séries iniciais, os problemas devem estar intimamente ligados a ações concretas que podem ser reais ou imaginadas. Mesmo quando o problema for utilizado como “disparador” de novos conhecimentos, ele deve ser compatível com os conhecimentos dos alunos e com suas reais possibilidades de construir estratégias de resolução com ajuda dos colegas e do professor.

Orientação do trabalho independente dos alunos

Quando falamos em trabalho independente, isso não significa que o professor deva deixar o aluno (ou dupla ou grupo) sozinho, sem auxílio ou então com auxílio insuficiente em relação às suas necessidades. Observando o trabalho dos alunos, o professor deve estimulá-los e orientá-los por meio de perguntas que conduzam à solução do problema. Esta ajuda deve considerar o que o aluno já está pensando e ser oferecida de modo que o professor não dê a solução, deixando ao aluno o prazer da descoberta.

O professor pergunta se é possível formar novos agrupamentos, mas deixa a descoberta aos alunos

O que o professor faz é, aos poucos e por meio de sugestões, contribuir para que os alunos compreendam o problema e construam um plano para resolvê-lo. Este forma de trabalho ajuda a criar um hábito e um método, que serão muito úteis, principalmente quando a complexidade dos problemas for aumentando. Um método para a resolução de um problema pode ser resumido em quatro etapas:

1º - Compreender o problema, determinando o que se pede e o que foi dado.

2º - Elaborar um plano para resolução.

3º - Executar o plano.

4º - Examinar a solução.

Ao auxiliar seus alunos na resolução de problemas, o professor atento a estes passos vai ajudá-los no uso de um método de resolução. Procurando acompanhar o raciocínio da criança, ele fará perguntas ou dará sugestões tais como:

- *"Releia o problema."*
- *"Qual é a pergunta?"*
- *"O que precisamos encontrar?"*
- *"O que já sabemos?"*
- *"Qual o próximo passo para a solução?"*

Para exemplificar, veja este diálogo que leva o aluno à compreensão de um problema e ao planejamento da resolução. Observe como o professor se preocupa mais em incentivar o raciocínio do que em oferecer respostas prontas. (P – professor, A – aluno)

P – Você poderia ler o problema, por favor?

A – "Numa sala de aula os alunos ocupam 4 filas, com 10 carteiras cada uma. Se quisermos trabalhar em grupos de 5 alunos, quantos grupos vamos formar?"

P – O que nós sabemos?

A – Que os alunos estão na sala e que a sala está arrumada em filas.

P – Isto mesmo. Mas nós sabemos quantas filas?

A – O problema diz que são 4 filas com 10 carteiras em cada uma.

P – E o que queremos saber?

A – A quantidade de grupos.

P – Certo. Mas os grupos podem ser como você quiser?

A – Não, cada grupo vai ter 5 alunos.

P – O que temos que saber primeiro para resolver nosso problema?

A – Temos que saber quantos alunos tem na sala.

P – Certo, e depois?

A – Aí dividimos por 5!

P – Por quê?

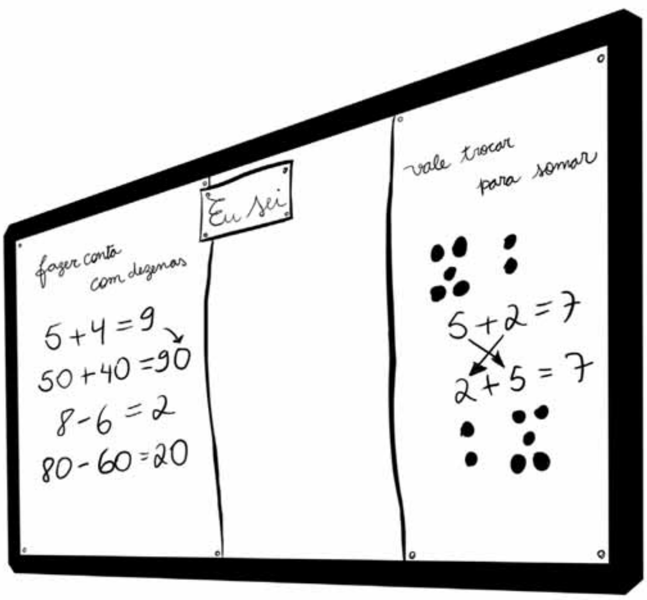
A – Para saber quantos cabem ... quantos grupos de 5 vai ter.

P – É isso mesmo – agora, ao trabalho!

Discussão e sistematização dos conhecimentos

A terceira etapa do trabalho do professor ao propor resolução de problemas para seus alunos acontece, em geral, ao final do período de trabalho independente. Cabe ao professor criar condições para a comunicação das estratégias utilizadas pelos alunos para a resolução e incentivar a discussão, sempre de forma cuidadosa e valorizando o trabalho realizado, para que todos os alunos se sintam estimulados a participar e a continuar sempre comunicando seus resultados. Outra forma de socializar soluções e discutir métodos com toda a turma é resolver alguns problemas coletivamente, a partir das respostas das crianças e levantando novos questionamentos a cada passo.

Sistematizar os conhecimentos significa refletir sobre as ações realizadas, obtendo conclusões que podem ser aplicadas a novas situações. Os alunos podem contribuir com suas idéias e o professor pode criar um mural, no qual as conclusões sejam destacadas. Por exemplo, este poderia ser o mural de Matemática de uma turma que está vivendo um momento de construção dos fatos básicos da adição e da subtração.



SUGESTÕES DE ATIVIDADES

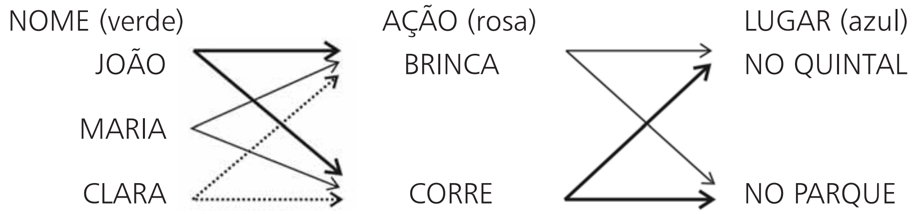
Vamos apresentar exemplos de situações–problema diferentes do padrão mais comum encontrado, por exemplo, em muitos livros didáticos. É claro que não estamos esgotando todas as possibilidades e você pode inventar outras. Na verdade, gostaríamos que você refletisse sobre as inúmeras oportunidades que sua sala de aula oferece para estimular seu aluno a resolver problemas.

Problemas que não pedem uma resposta numérica

Por exemplo:

1 – Vamos colocar uma moldura de fita colorida no nosso quadro de avisos? E como vamos saber a quantidade de fita que precisamos comprar?

2 – Construir frases, pela combinação de palavras escritas em pequenos cartões, de cores diferentes (raciocínio combinatório)



Para obter todas as combinações possíveis, montamos uma estrutura 3x2x2 como indicado pelas setas.

Vejamos as combinações formadas:

João brinca no quintal.	Maria brinca no quintal.	Clara brinca no quintal.
João brinca no parque.	Maria brinca no parque.	Clara brinca no parque.
João corre no quintal.	Maria corre no quintal.	Clara corre no quintal.
João corre no parque.	Maria corre no parque.	Clara corre no parque.

3 – Na aula 2, usamos cartões contendo figuras com diferentes atributos para desenvolver um jogo que contribui para a habilidade de classificar. Os alunos em fases de aprendizagem mais avançadas podem construir os materiais para serem usados pelos alunos iniciantes, explorando o pensamento combinatório e as formas geométricas. Por exemplo, montar um material com a estrutura 3 x 2 x 3 e os seguintes atributos:

FORMA (3)	TAMANHO (2)	COR (3)
Bola	Grande	Azul
Triângulo		Amarelo
Quadrado	Pequeno	Vermelho

Antes de iniciar a atividade, você pode perguntar: "quantos cartões vamos fazer?"

4 – Após uma pesquisa de preços dos produtos considerados básicos pelos alunos, em dois ou três supermercados da comunidade, proponha que a turma arrume os dados de maneira a facilitar a consulta às informações e a comparação entre elas.

Problemas com dados em excesso

Utilizando também uma pesquisa de preços ou encartes de lojas e supermercados, pergunte onde eles gastariam menos para comprar uma lista de produtos construída coletivamente.

Problemas incompletos (faltando dados)

"Quanto vai custar para você ir ao parque de diversões com mais cinco amigos?"

Explore problemas como este perguntando:

- *Você pode responder a essa pergunta?*

- *Por quê?*

- *O que mais você precisa saber para responder esta pergunta?*

- *Como você faria para saber o preço do ingresso?*

Problemas dramatizados

Brincadeiras de "lojinha" ou "feira" usando sucatas e dinheirinho de brinquedo para as crianças exercerem os papéis de comprador e vendedor, darem e conferirem o troco, fazerem estimativas de gastos etc.

Problemas que estimulam as habilidades de fazer estimativas e cálculo mental

1. Sérgio foi à banca de jornal com R$ 5,00. Você acha que ele pode comprar 6 gibis a R$ 1,20 cada? Por quê?

2. Se você dividir 540 reais por 5 pessoas, cada pessoa vai ganhar mais ou vai ganhar menos do que 100 reais? Por quê?

3. Quantos palmos tem o comprimento do quadro negro? Agora meça seu palmo usando a régua. Quantos centímetros tem o quadro aproximadamente?

Problemas envolvendo estimativas e cálculo mental são muito úteis para a vida cotidiana. Muitas vezes, precisamos tomar decisões sem termos a nossa disposição os instrumentos adequados, lápis e papel. Estas são habilidades importantes e que precisam ser estimuladas. Uma boa forma de desenvolvê-las é aproveitar qualquer problema e pedir que as crianças façam previsões do resultado que será encontrado e depois confiram a resolução com as previsões feitas. Esta estratégia contribui, ainda, para criar o hábito de avaliar resultados, detectar seus próprios erros, repensar estratégias e verificar cálculos.

Problemas que estimulam novas ações e preparam para novas operações

1. Eduardo estava tentando completar seu álbum. Sua mãe trouxe 5 pacotinhos com três figurinhas em cada um. Quantas figurinhas Eduardo ganhou?

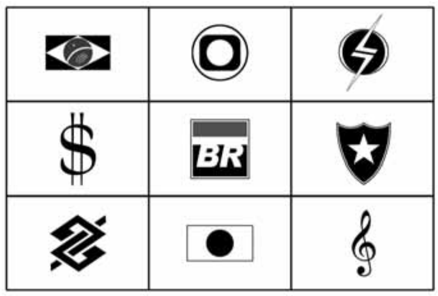
2. Seu Pedro separou por mês R$ 52,00 para a mesada de seus quatro filhos. Ele vai dar quantias iguais para cada um. Quanto cada filho receberá?

Problemas como estes podem ser propostos antes mesmo do estudo das operações de multiplicação e divisão. Eles podem ser resolvidos por meio de composições e decomposições de números e das operações de adição e subtração. Estas experiências irão contribuir para a conceituação das novas operações.

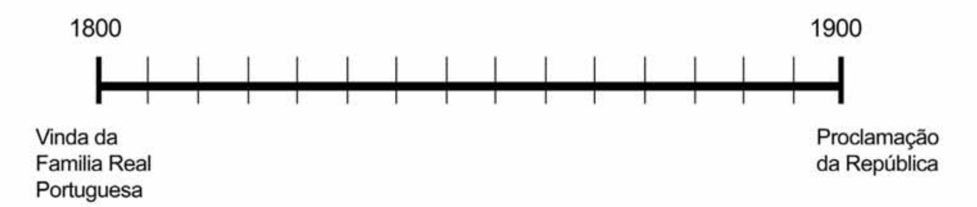
Problemas para desenvolver a habilidade de interpretação de símbolos e representações gráficas

Identificar símbolos de uso cotidiano facilita o aprendizado dos símbolos matemáticos.

1. Divida a turma em grupos e dê a cada um deles algumas das figuras abaixo para que tentem dizer o que cada uma delas representa ou significa. Após algum tempo, solicite a um representante de cada grupo que explique, mostrando para a turma, os símbolos que conhece.



2. Observe a linha do tempo e responda:



a) Cada espaço (|——|) representa _____ anos.

b) Ao todo estão representados _______ anos ou um _______

c) Procure assinalar corretamente na linha do tempo:

- A independência do Brasil (1822)
- O fim da Guerra do Paraguai (1870)

d) Há quantos anos foi proclamada a República? (Lembre-se do ano em que estamos)

Resposta: ____

Estes problemas têm como objetivo levar a criança a perceber que um símbolo representa um objeto, uma idéia ou uma atividade. Lembre-se que utilizamos muitos símbolos em Matemática e que, na aquisição de uma nova linguagem, é importante apresentar às crianças atividades que sirvam como suporte à introdução, compreensão e utilização destes símbolos.

Problemas extraídos de anúncios

A "Loja X" vende ferro de passar roupa por R$ 45,00, com garantia de 1 ano. A "Loja Z" vende por R$ 39,00 com garantia de 6 meses. Em que loja você compraria o seu ferro? Explique o porquê.

Problemas propostos sob a forma de jogos

Você já explorou, em capítulos anteriores, várias sugestões de jogos e irá explorar outras mais adiante. Jogos estimulam cálculo mental, estimativas, memorização de fatos básicos e ajudam a desenvolver muitas outras habilidades e estratégias.

Vamos ver mais alguns exemplos:

"Ganha quem chegar ao Zero"

Material: Material Dourado e um dado

Como jogar: Em grupos de 4 ou 5 alunos. Cada jogador recebe três barras e dois cubinhos. Na sua vez de jogar, o aluno lança o dado e tem de pagar ao "banco" o valor assinalado no dado (isto é, colocar a quantidade na "sobra" de material dourado sobre a mesa). Ganha quem primeiro ficar sem peças ou impossibilitado de pagar ao banco a sua "dívida".

Variações: pode-se aumentar o número de dados; aumentar a quantidade de peças dada a cada aluno; estabelecer que para ganhar, o valor no dado seja exato (o jogador passa a vez se não conseguir) etc.

"Jogo do Palpite"

Material: Caixa de fósforos grande com subdivisão e palitos de fósforo.

Como jogar: Colocar na caixa uma quantidade de palitos de fósforo (por exemplo, 10), fechá-la e sacudi-la. Pedir que os alunos escrevam seu palpite de como os fósforos vão estar distribuídos nas duas partes da caixa quando ela for aberta. Ganha um ponto o aluno que acertar o palpite; ganha o jogo o aluno que tiver mais pontos depois de cinco rodadas.

Problemas que não admitem representação concreta

Suponhamos que o nosso problema fosse, por exemplo, saber o número total de bois de Minas Gerais e São Paulo. Reunir todos os animais e contá-los seria muito difícil. No entanto, a ação de reuni-los pode ser imaginada e o total facilmente encontrado se os números envolvidos na situação forem conhecidos e representados simbolicamente. Uma outra sugestão é utilizar a calculadora para problemas como este, nos quais efetuar a operação pode desestimular o aluno a resolver o problema e a utilização do algoritmo não é o objetivo principal.

Para além das fronteiras

Você pode contribuir para o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas em muitos outros momentos e não apenas durante o estudo de números. Vejamos alguns exemplos:

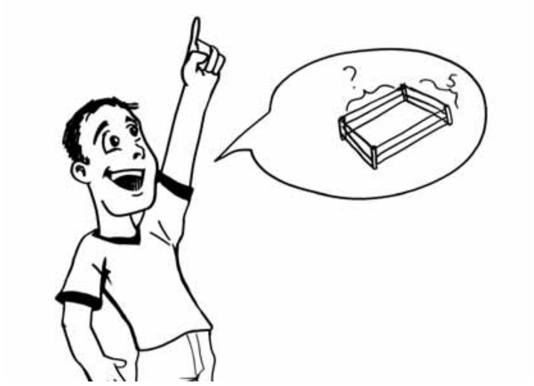
Problemas redigidos pelos alunos

Levar a criança a redigir (ou apenas a enunciar oralmente) com suas próprias palavras, problemas provenientes de situações vividas em classe, da leitura de uma notícia de jornal, cartaz ou livro, de atividades de ciências sociais, ou mesmo criados a partir de sentenças matemáticas ("que problema essa conta resolve?"). Além das habilidades de produção e interpretação de textos, tais atividades permitem avaliar a compreensão que o aluno tem dos fatos, avaliar o uso correto do vocabulário matemático e o domínio dos conceitos das operações. O professor pode colecionar esse material para propor sua resolução, e as crianças se sentirão muito estimuladas a resolver problemas que elas próprias ou os colegas criaram.

Problemas envolvendo formas geométricas

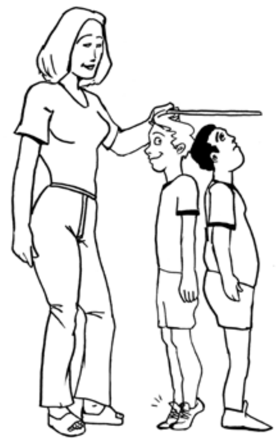
1. Usando apenas dobraduras e a tesoura, de que forma você faria um quadrado?

2. Um terreno retangular, de 5 m de largura, foi cercado com 3 voltas de arame. O que precisamos saber para podermos calcular quantos metros de arame foram necessários?



Problemas envolvendo unidades de medida não padronizadas

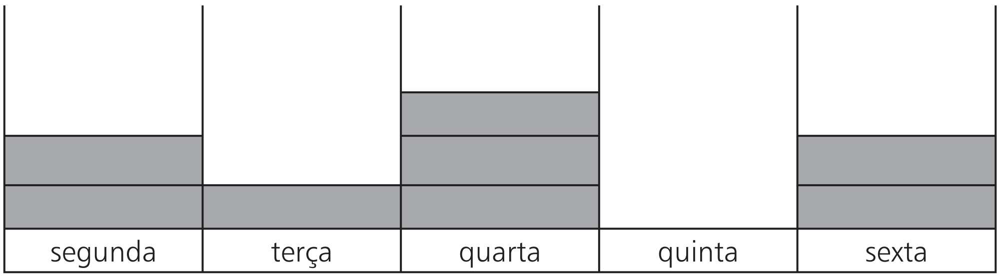
1. Distribua pedaços de barbante (ou varetas) de diversos comprimentos (três tamanhos diferentes, por exemplo) entre seus alunos e peça que eles meçam cada um com seu barbante o comprimento de algum objeto da sala (por exemplo, o quadro negro). Registre os resultados dos experimentos em uma tabela e pergunte *"quais alunos vocês acham que tinham barbantes do mesmo comprimento que o de...*[nome de um aluno]*?"*. Explore também as diversas respostas que podem aparecer para alunos usando pedaços de barbante de mesmo comprimento, tais como: "mais que cinco e menos que seis", "cinco, mas sobrou um pouco do quadro", " seis, mas sobrou barbante", "seis, mas passou do final do quadro" e "acho que cinco e meio".



2. Peça que os alunos, em duplas, inventem uma maneira de verificar qual dos dois é mais alto. Faça uma discussão das estratégias utilizadas pelos alunos.

Problemas envolvendo registro e análise de dados

Construa com seus alunos um registro gráfico para o número de ausentes em cada dia, durante uma semana:



Aproveite o trabalho realizado e faça perguntas, estimulando a leitura correta e a análise dos dados (houve mais faltas na terça ou na quarta? quantas a mais? etc.)

ESCUTE SEU ALUNO

Nesta aula, discutimos o uso de problemas que possam estimular a capacidade de análise de situações–problema e o senso critico dos alunos. Em geral, as crianças respondem muito bem a este tipo de desafio, desde que esteja adequado ao seu nível de escolaridade.

Trabalhando com alunos de 2ª série, Flávia criou uma seqüência de atividades, denominada "qual é o problema". Nestas atividades, as crianças recebem problemas para os quais não é possível encontrar uma solução. A professora pede que os alunos expliquem "qual é o problema" com o enunciado proposto.

Veja as explicações oferecidas por Leila e Mário para responder "qual é o problema" com o seguinte enunciado:

"Rafael deu algumas de suas figurinhas para o Alfredo e ainda ficou com 15 figurinhas. Quantas figurinhas o Rafael tinha?"

Leila:

Qual é o problema? Porque não diz 2 coisas quantas ele tinha e quantas deu para o Alfredo

Mário:

Qual é o problema? NÃO DÁ PRA SABER PORQUE NÃO FALA QUANTAS ELE TINHA E NEM AS QUE ELE DEU

A formulação da resposta de Leila indica que esta foi dirigida para a pergunta "qual é o problema?" – ela oferece somente uma explicação para a impossibilidade de solução do problema proposto. Já a formulação da resposta de Mário poderia dar margem à dupla interpretação. A afirmativa "não dá pra saber" poderia servir como resposta tanto para *"Qual é o problema?"* quanto para *"Quantas figurinhas o Rafael tinha?"*. No entanto, na sua explicação, Mário demonstra saber que há problemas no enunciado proposto por Flávia.

Ambos são capazes de perceber que o problema é a insuficiência de dados para resolver a questão. Note também que, para eles, há duas informações faltando: "quantas ele tinha" e "quantas ele deu", ou seja, as crianças ainda não separam o dado que falta da informação que está sendo solicitada pelo problema.

O mais importante é que estas crianças estão tendo a chance de desenvolver a habilidade de analisar uma situação-problema e verificar se os dados são suficientes para resolvê-la. Reconhecer a falta dados, quais são eles e saber como obtê-los (que pergunta deve ser feita ou saber como e onde buscar) são habilidades bastante úteis em diversas situações da aprendizagem matemática e da vida cotidiana.

LEMBRE-SE

A escolha de problemas adequados aos seus alunos é fundamental. Não haverá prazer na descoberta, ou até mesmo não haverá a própria descoberta, se não houver o interesse e a possibilidade de realizá-la. Além disso, o incentivo do professor é muito importante para que o hábito de resolver problemas seja desenvolvido: através de perguntas que estimulam a inteligência do aluno, o professor o ajuda a desenvolver habilidades como as de comunicar seu pensamento, de rever o próprio raciocínio e a de pensar com clareza e criatividade.

Não devemos esquecer que o maior propósito em adotar esta forma de trabalhar - privilegiando a resolução de problemas - é preparar o aluno para resolver, com autonomia, os futuros problemas de seu cotidiano e desempenhar tarefas nas mais diferentes ocasiões do seu dia-a-dia. A resolução de problemas em Matemática contribui para a formação de hábitos, como o de estimar resultados; de rever a solução de forma crítica; de refletir, compreendendo o que acabou de fazer – todos de grande relevância para avaliar situações que surgem em nossas vidas.

ATIVIDADES PARA O PROFESSOR

1. Contando Casos: faça um pequeno relato sobre uma experiência com seus alunos relacionada com os temas discutidos nesta aula.

Sugestão: Escolha e relate duas situações-problema que você costuma trabalhar com seus alunos e que você considera muito proveitosas. Explique a sua escolha.

2. A professora pediu que seus alunos resolvessem o seguinte problema: "Para chegar à escola às 8 horas, Luiz deve acordar 2 horas antes. A que horas Luiz deve acordar?". Fazendo os cálculos mentalmente, Andréa respondeu "10 horas". Através de perguntas, como você ajudaria Andréa a verificar seu erro?

3. Nesta aula, vimos que as etapas para a resolução de um problema são:

1º - Compreender o problema

2º - Elaborar um plano

3º - Executar o plano e

4º - Examinar a solução.

Quais destas etapas você consegue reconhecer quando um aluno apresenta a seguinte solução para o problema "Maria tem 26 figurinhas e Pedro tem 18. Quantas figurinhas Maria tem a mais que Pedro?"

Solução:

Maria: 10 10 5 1 ⟶ 10 8 2 5 1

Pedro: 10 8 ⟶ 10 8

} Maria tem 8 figurinhas a mais do que Pedro.

Observação: Cada uma destas etapas é importante, e seu conjunto define claramente o processo natural de resolução de qualquer problema. Vamos explorar cada uma delas nos exercícios de 4 a 7.

4. *Para problemas escritos ou não, é fundamental* **a compreensão do problema***, ou seja, uma interpretação adequada do que está escrito ou do que foi dito. Diante de um problema, precisamos antes de tudo saber o que estamos procurando – o que se pede – e também o que já sabemos a respeito da situação – as condições impostas.*

Elabore uma pequena seqüência de perguntas que poderiam ajudar seus alunos nesta etapa da resolução. Se você preferir, proponha um problema e elabore as questões para este problema específico.

5. *Tendo compreendido o problema,* **elaborar um plano** *depende dos conceitos e habilidades que o aluno já desenvolveu. É natural que, para elaborar um plano, recorramos aos nossos conhecimentos e experiências anteriores, tentando recordar se já estivemos diante de alguma situação semelhante, reconhecendo as ações necessárias para, então, decidir que operações matemáticas efetuar.*

Elabore uma pequena seqüência de perguntas que poderiam ajudar seus alunos nesta etapa da resolução. Se você preferir, elabore as questões para o problema que você propôs no exercício 4.

6. *Se os dois primeiros passos tiverem sido bem explorados e se o problema estiver adequado à fase de escolaridade do aluno, o terceiro passo,* executar o plano*, deverá transcorrer naturalmente, a não ser que o aluno não siga o plano elaborado ou que acumule erros de execução, que podem ser evitados verificando-se cada passo.*

Elabore uma pequena seqüência de perguntas que poderiam ajudar seus alunos nesta etapa da resolução. Se você preferir, elabore as questões para o problema que você propôs no exercício 4.

7. *O* exame da solução *é uma etapa freqüentemente omitida. No entanto, é ela que levará à formação do senso crítico e proporcionará, muitas vezes, novas descobertas. Quando examinamos a solução de um problema resolvido, não estamos interessados somente em verificar se a resposta está correta ou, no caso de uma situação com mais de uma solução, se a resposta encontrada se adapta às condições e aos dados. O exame da solução é uma etapa que leva, também, a descobertas como: a possibilidade de encontrar a solução por um caminho mais rápido e eficiente; a comparação entre a solução estimada e a encontrada após a execução do plano; ou se o método de resolução poderá ser utilizado em outros problemas.*

Elabore uma pequena seqüência de perguntas que poderiam ajudar seus alunos nesta etapa da resolução. Se você preferir, elabore as questões para o problema que você propôs no exercício 4.

8. Para cada item abaixo, escreva um pequeno parágrafo dizendo se você concorda ou discorda de cada uma das afirmativas, explicando sua opinião.

(a) "se a situação proposta em um problema for idêntica a uma já resolvida pelos alunos, eles não estarão resolvendo um problema, mas apenas aplicando um tipo de processo já conhecido, o que não contribui no desenvolvimento de sua autonomia";

(b) "diante de uma situação nova, só será possível ao aluno elaborar um plano, se esta situação for adequada, não exigindo conhecimentos matemáticos ainda não apreendidos em sua plenitude";

(c) "levar os alunos a redigir problemas é uma atividade muito proveitosa para a aprendizagem de Matemática";

(d) "o jogo, se bem escolhido, pode contribuir para desenvolver vários aspectos do pensamento matemático. Nele, precisamos encontrar estratégias de ação e aceitar desafios, o que é importante não só para aprender e usar a Matemática como para a vida em sociedade".

9. Dê pelo menos dois exemplos de:

(a) Problemas sem solução.

(b) Problemas com mais de uma solução.

10. Discuta quais habilidades podem ser desenvolvidas pelos alunos quando os desafiamos com os problemas que você propôs na questão anterior.

AULA 7

O ALGORITMO DA ADIÇÃO

OBJETIVOS DESTA AULA

• Identificar as etapas do ensino do algoritmo da adição.

• Indicar procedimentos que capacitem o aluno a utilizar o algoritmo corretamente.

TEXTO PARA LEITURA

Um algoritmo é um dispositivo prático, elaborado para facilitar a execução de uma certa tarefa. Convivemos com vários tipos de algoritmos, cotidianamente. Alguns são muito simples, como ligar uma televisão (basta achar o botão correto e pressioná-lo); outros mais elaborados, como uma receita culinária (devemos organizar os ingredientes e, em ordem, executar as etapas); outros ainda que exigem um bom tempo de treinamento até que nos sintamos seguros para poder executá-los independentemente, como dirigir um automóvel.

Quando nos deparamos com um algoritmo em nosso cotidiano, é bastante comum precisar de ajuda nas primeiras tentativas de utilizá-lo. Além disso, se não compreendermos o algoritmo, vamos acabar usando-o mecanicamente e sem nenhuma autonomia, apenas seguindo instruções (pense, por exemplo, no formulário da declaração do Imposto de Renda). De forma similar, quem não dispõe de boas estratégias de cálculo passa por dificuldades em inúmeras situações do cotidiano que exigem autonomia de decisões sobre "que cálculo fazer" e "como fazê-lo".

Dentre as estratégias de cálculo, os algoritmos das quatro operações ocupam lugar de destaque. Explorando as vantagens do Sistema Decimal de Numeração, eles foram idealizados para permitir a realização dos cálculos com exatidão e com razoável velocidade. Vamos ter a oportunidade de discutir cada um deles neste curso, iniciando pelo algoritmo da adição.

Nas aulas anteriores, incentivamos o desenvolvimento de diversas atividades que preparam o aluno para adicionar corretamente, incluindo aquelas voltadas para a compreensão do sistema decimal de numeração, adiando a introdução do algoritmo. Agora, vamos discutir brevemente nossos motivos para propor que você considere esta forma de trabalhar.

Em primeiro lugar, a habilidade de utilizar o algoritmo corretamente não se adquire de uma só vez, pois requer tempo e prática. Por isso, o algoritmo da adição só deve ser apresentado às crianças quando elas já dominarem, com certa segurança, o conceito da operação, os fatos básicos e o sistema de numeração.

Em segundo lugar, é importante que fique claro que não estamos fazendo um bom uso do algoritmo quando solicitamos, a nossos alunos, um "arme e efetue” em adições como “5 + 2 =” ou “8 + 7 =”. Os resultados destas adições são fatos básicos e o algoritmo da adição não ajuda a criança a efetuar a operação. Nesses casos, é mais adequada a resolução por meio do cálculo mental (iniciando o processo de memorização com o auxílio de materiais de contagem). Na verdade, para que a criança utilize bem o algoritmo quando for operar com as representações dos números dispostas em colunas, ela precisará de boas estratégias mentais para determinar adições com números de um algarismo.

Finalmente, consideramos que no processo de construção do algoritmo da adição, é recomendável que os primeiros exemplos já envolvam adições com ”reservas”, ou seja, aquelas em que a soma das unidades isoladas é maior que nove, sendo necessário fazer um agrupamento para a casa das dezenas. Trabalhando com ”reserva” desde o início, o aluno compreende porque é necessário começar a operar pelas unidades, isto é, da direita para a esquerda, o que contraria seus hábitos de leitura. Por outro lado, se trabalharmos os primeiros exemplos apenas sem reservas, o resultado da operação será o mesmo se operarmos da esquerda para direita ou vice-versa. Tal estratégia não permite ao aluno perceber que, na utilização do algoritmo, há uma nítida vantagem em se iniciar o processo pela ordem das unidades.

Na verdade, as únicas adições que realmente necessitam do uso correto da técnica do algoritmo para serem realizadas são aquelas com “reserva”. Como discutimos acima, todas as outras podem (e devem) ser feitas sem utilizar a totalidade de recursos oferecidos pelo uso do algoritmo. Além disso, se o sistema de numeração for bem trabalhado, a criança já deve, neste momento, estar bem habituada a grupar 10 unidades e transformá-las em uma dezena, e a dificuldade da “reserva” deverá estar minimizada.

SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Atividades que levam o aluno a adicionar corretamente

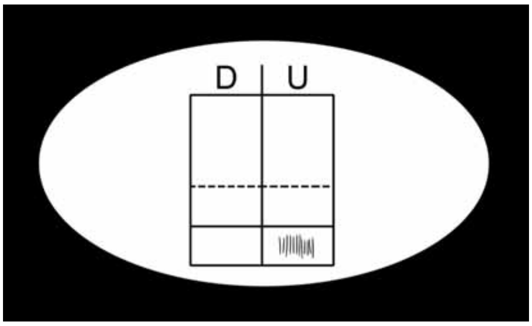
Para dar início ao processo de aprendizagem do algoritmo da adição, devemos explorar bastante o material de contagem e o QVL (quadro valor de lugar).

Por exemplo:

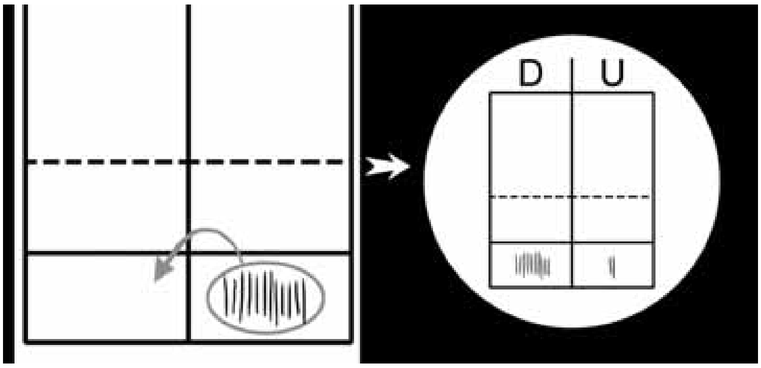
• Distribua para cada dupla de alunos uma certa quantidade de palitos e um retângulo de cartolina com o seguinte formato:

• Peça a um aluno que coloque 5 palitos na primeira linha da coluna das unidades e a outro que coloque 7, logo abaixo, na segunda linha da coluna das unidades.

• Peça, a seguir, que eles juntem os palitos que foram colocados nas linhas e os coloquem na última casa da coluna das unidades. A distribuição deverá ficar assim:

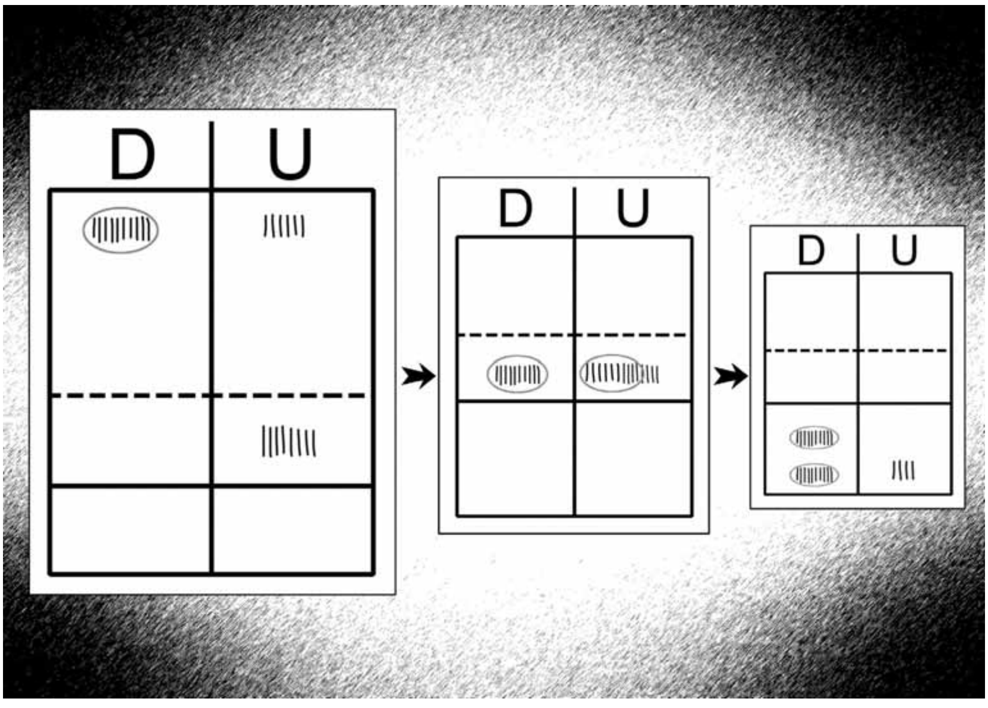


• Analise com eles quantos palitos ficaram na casa das unidades e o que devem fazer agora. Os alunos deverão perceber que há mais de 9 unidades na casa das unidades, e que é preciso fazer um grupo de dez e transferi-lo para a casa das dezenas.



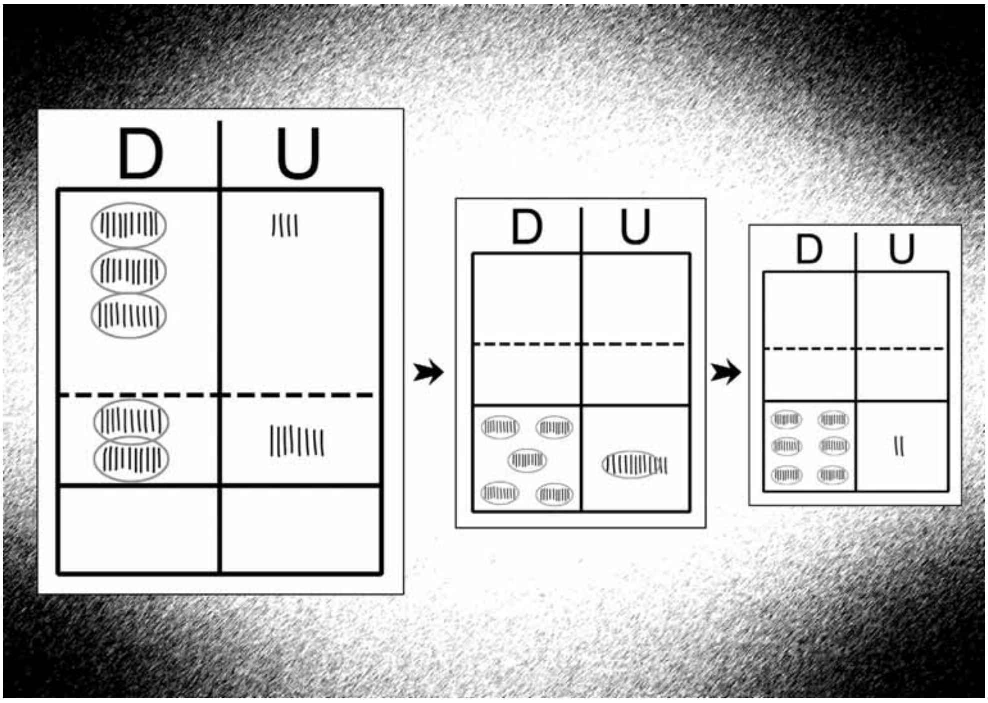
• Repita a atividade várias vezes, usando outros valores, como por exemplo:

1) 16 e 8



Essas etapas se passam dentro da mesma tabela. Foram aqui colocadas em tabelas diferentes para uma melhor percepção de cada uma delas.

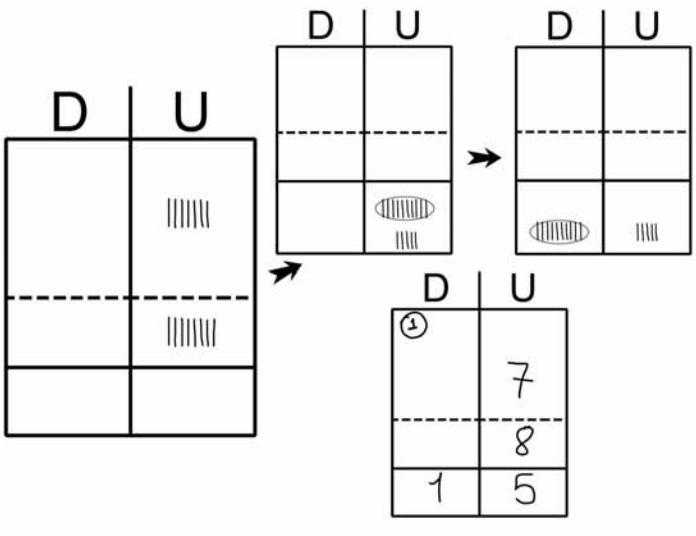
2) 34 e 28



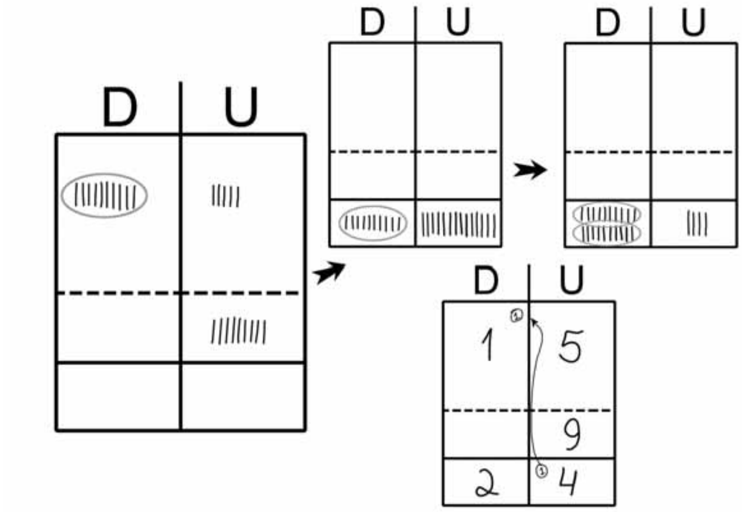
Depois de repetir esta atividade várias vezes usando somente material de contagem, vamos utilizar, além do retângulo de cartolina e dos palitos, uma folha de papel em branco para registrar numericamente a operação.

Por exemplo:

1) Vamos adicionar 7 e 8.



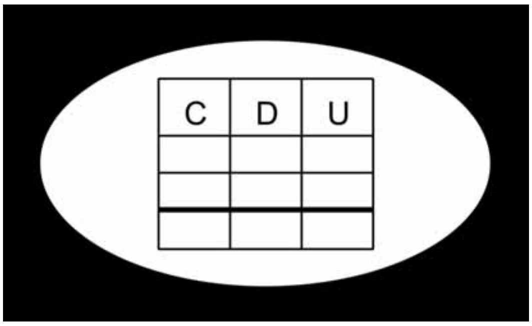
2) Vamos adicionar 15 e 9.



Esta atividade deve ser repetida várias vezes, usando-se outros números. Só quando o aluno já dominar bem a reserva das unidades para a dezena é que devemos iniciar, por um processo análogo, as operações que envolvem centenas.

As centenas

Para trabalhar com as centenas usando materiais como palitos, por exemplo, teremos alguns problemas de representação (imagine como ficaria "pesada" a representação dos grupos de *cem*). Nesse caso, é melhor usarmos palitos coloridos para representar as centenas, as dezenas e as unidades como já foi descrito na aula de sistema de numeração.



Por exemplo:

• Entregue às crianças uma outra tabela como a do modelo ao lado:

• Peça para representarem, na tabela, a soma de 246 e 37.

Se as cores escolhidas pelas crianças forem:

vermelho *para as centenas*
azul *para as dezenas*
natural *para as unidades*

a representação na tabela ficará assim:

	CENTENAS	DEZENAS	UNIDADES
na primeira linha 246	*2 palitos vermelhos*	*4 palitos azuis*	*6 palitos naturais*
na segunda linha 37		*3 palitos azuis*	*7 palitos naturais*

Observação Como não dispomos de cores, usaremos, daqui por diante, o seguinte código para facilitar nossa representação:

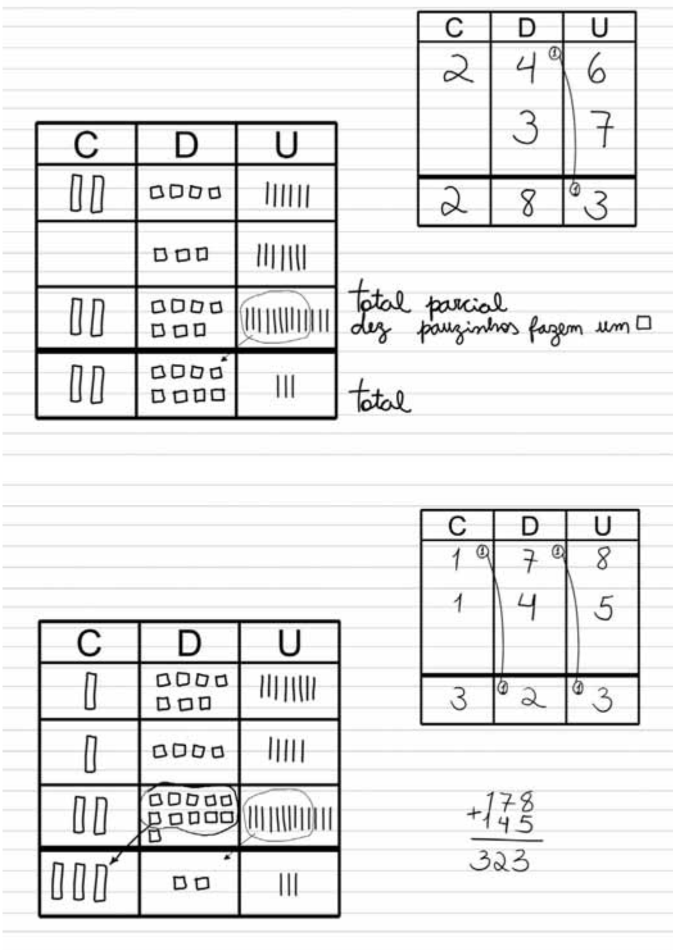
para representar as unidades |

para representar as dezenas □

para representar as centenas ▯

Quando as crianças juntarem os palitos da unidade, perceberão que o resultado é de 13 palitos naturais. Logo, poderão fazer um grupo de dez e trocar por um palito azul, que vai se juntar aos outros da ordem das dezenas. Quando juntarem os palitos azuis, perceberão que só ficaram oito, logo não há troca, pois a quantidade de dezenas não forma uma centena. Na terceira ordem, como não foi formada uma nova centena, basta repetir as 2 que fazem parte da primeira parcela.

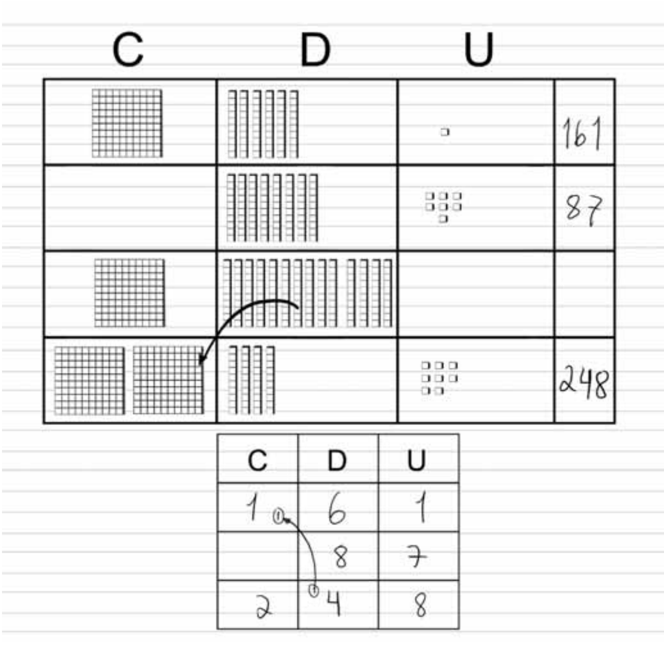
Peça que os alunos representem graficamente e numericamente, em uma tabela, a operação feita.

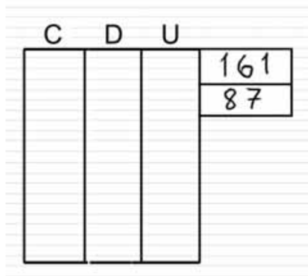


Continue usando material de contagem e as tabelas do QVL até perceber que estão se esgotando todas as dificuldades com a "reserva", das unidades para as dezenas e das dezenas para as centenas. O processo de abandonar os recursos de apoio deve ser gradual. Você observará que seus alunos têm ritmos bem diferentes, e alguns vão se libertar da necessidade de representar concretamente as adições antes de outros. É importante respeitar o ritmo de cada criança. Você deve, aos poucos, incentivar que todos parem de usar materiais de apoio, mas lembre-se que isto acontecerá naturalmente quando as crianças já tiverem interiorizado todo o processo. Entretanto, não devemos obrigar os alunos que já não sentem mais necessidade de usar material concreto ou registro semi–concreto a passarem pelas etapas preparatórias, apenas porque outros ainda necessitam delas. As crianças precisam ter acesso aos materiais de apoio sempre que precisarem, sempre que for preciso compreender seu erro, sempre que uma adição apresentar novos desafios, o que é diferente de tê-los sempre sobre suas carteiras.

OUTROS RECURSOS

Para melhor compreender a organização do algoritmo da adição, também podemos utilizar outros materiais como aqueles que exploramos ao final da aula de Sistema de Numeração. Vejamos um exemplo de atividade usando como material de apoio o Material Dourado e o QVL.





Trocamos 10 barras (dez dezenas) por uma placa (1 centena); ficaram 4 barras.

Para além das fronteiras

Uma linguagem é um sistema de comunicação entre os homens. Todo sistema de comunicação é composto de códigos que obedecem a um conjunto de regras básicas. A Matemática é uma ciência que, ao longo de sua história, foi adquirindo uma linguagem própria. Além de possuir uma terminologia técnica, utiliza símbolos, tabelas, gráficos e diagramas.

Por sua estrutura, a linguagem matemática pode contribuir para desenvolver o raciocínio lógico e o poder de síntese. No entanto, ela será adquirida, em etapas, pelos alunos que, durante um longo período de tempo, cometerão não apenas erros de notação, mas também erros de linguagem, mesmo quando o raciocínio matemático desenvolvido for correto (você vem encontrando diversos exemplos deste fato nas seções “Escute seu aluno”).

Quando consideramos a aprendizagem do algoritmo da adição, além da capacidade de “armar a conta” corretamente, há um vocabulário simples a ser interiorizado. Este deve ser introduzido naturalmente por intermédio da fala do professor, para que, aos poucos, a criança incorpore as novas palavras ao seu vocabulário, usando-as como usa qualquer outra palavra da linguagem corrente. Professor, para se referir aos termos da adição use corretamente seus nomes e aos poucos as crianças passarão a adotá-los em suas explicações orais ou por escrito.

$$\begin{array}{r l}
28 & \text{—— parcela} \\
+\ 14 & \text{—— parcela} \\
\hline
42 & \text{—— soma ou total}
\end{array}$$

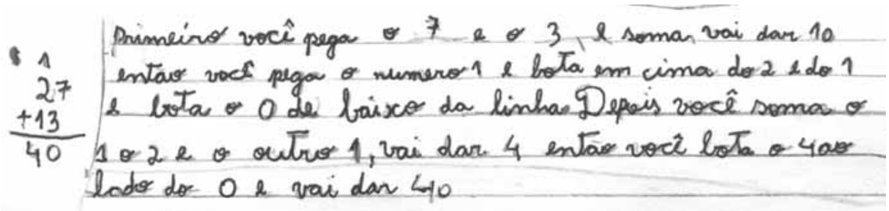
Lembre-se que é necessário partir sempre da linguagem corrente, que o aluno domina, de forma a auxiliá-lo na descoberta e construção do discurso matemático. É importante que o professor reconheça o significado que o aluno dá aos termos da linguagem matemática, o que já foi assimilado e é usado adequadamente. Cuidado também ao usar termos em Matemática que possuem sentidos diferentes na linguagem corrente (como *naturais* ou *resto*, por exemplo). Discuta estes termos com seus alunos, para que seja estabelecido o significado correto, por meio de uma negociação com a turma.

ESCUTE SEU ALUNO

Pedir às crianças que escrevam sobre como fazem para operar é uma boa oportunidade para o professor perceber de que forma elas estão se apropriando dos conhecimentos estudados.

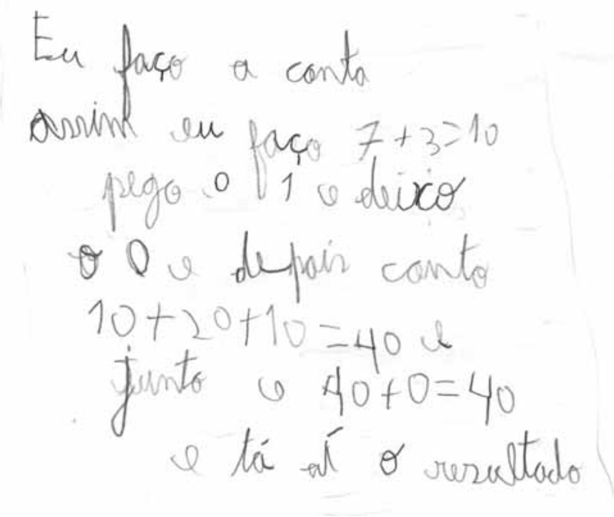
Vamos comparar as explicações oferecidas por Cláudia e por Eduardo sobre como fazer a operação “ 27 + 13 = ” utilizando o algoritmo.

Cláudia nos conta que:


$$\begin{array}{r}
{}^{1}\ \ \\
27 \\
+13 \\
\hline
40
\end{array}$$

Primeiro você pega o 7 e o 3 e soma vai dar 10
então você pega o numero 1 e bota em cima do 2 e do 1
e bota o 0 de baixo da linha Depois você soma o
1 o 2 e o outro 1, vai dar 4 então você bota o 4 ao
lado do 0 e vai dar 40

Ao passo que Eduardo explica o seu pensamento da seguinte forma:


Eu faço a conta
assim eu faço 7+3=10
pego o 1 e deixo
o 0 e depois conto
10+20+10=40 e
junto o 40+0=40
e tá aí o resultado

Repare que Cláudia concentra suas explicações apenas nas etapas a serem realizadas, como se estivesse nos ensinando uma "receita de bolo": o que fazer e em qual ordem. Pelas explicações de Cláudia, não temos como saber se ela realmente construiu um significado para o trabalho mecânico que está realizando ou se apenas memorizou as etapas do procedimento. Observe ainda que ela afirma, ao final: "vai dar 4 então você bota o 4 ao lado do 0 e vai dar 40", ou seja, ela não parece levar em conta que o 4 escrito na segunda ordem já vale, por si só, 4 dezenas. Fica a pergunta; será que ela compreende o que está fazendo? Para saber mais, o professor teria que fazer algumas perguntas, tais como: *"o que significa esse 1?"* ou *"Você disse que vai dar 4. O que esse 4 significa?"*

Já Eduardo deixa bastante claro que há um lado mecânico em seu trabalho, mas também que ele sabe que o 1 que ele "pegou" significa, na verdade, 1 dezena ou 10 unidades. Observe que ele explica a adição feita na segunda ordem como uma adição de dezenas que serão, então, somadas às unidades registradas na primeira ordem. Eduardo está tão consciente que a soma entre dezenas e unidades deve ser feita para que o algoritmo seja corretamente aplicado, que ele explicita esta lógica, mesmo sendo zero o valor que ocupa a primeira ordem.

LEMBRE-SE

Para podermos trabalhar com as crianças os algoritmos das operações, da forma como propomos em nossas aulas, é de vital importância que elas iniciem o estudo das operações através da construção dos conceitos, pois de nada adianta usar uma técnica operatória corretamente se não se sabe quando utilizá-la. Fazer bom uso das propriedades ajuda a compreender o algoritmo, a criar estratégias próprias em caso de dificuldades, como não lembrar um fato básico, e a organizar melhor uma adição de muitas parcelas. Já a memorização dos fatos básicos (que estará, aos poucos, acontecendo de forma natural) contribui, inegavelmente, para o uso da técnica de cálculo de forma mais competente e ágil.

O exame do algoritmo que fizemos nesta aula mostra que sua construção pelos alunos depende ainda da compreensão do Sistema Decimal de Numeração. Dessa forma, é necessário que as crianças estejam aprimorando, pouco a pouco, a compreensão da organização do sistema: os agrupamentos de dez em dez, o valor posicional dos algarismos e a correta utilização do zero. O sistema de numeração deve ser bem explorado, para incluir números com mais ordens decimais a cada etapa. É necessário que as crianças já leiam e escrevam bem a representação decimal dos números até a ordem que estão operando e já tenham desenvolvido as habilidades de compô-los e decompô-los.

Trabalhando desta forma, seu aluno provavelmente utilizará o algoritmo com senso crítico. Para efetuar adições com "reserva", ele irá começar o processo da direita para a esquerda (ou seja, das unidades para as dezenas e assim por diante) e poderá fazer suas próprias escolhas de como operar quando não for este o caso. Um aluno que tenha desenvolvido boas estratégias mentais e um senso crítico para valores numéricos poderá, algumas vezes, abrir mão do algoritmo ao adicionar valores "grandes", por julgar que este será muito mais trabalhoso do que fazer o cálculo mentalmente, usando as propriedades que ele domina.

ATIVIDADES PARA O PROFESSOR

1. Contando Casos: faça um pequeno relato sobre uma experiência com seus alunos relacionada com os temas discutidos nesta aula.

2. No texto para leitura, argumentamos que o algoritmo <u>não ajuda</u> a efetuar a adição de números como 7 e 5 (de apenas um algarismo cada). Por outro lado, nas sugestões de atividade desta aula, por duas vezes, propomos que os alunos efetuassem operações como esta. Localize no texto estes exemplos, liste-os e discuta (apresentando seus argumentos) se você acha ou não que há uma contradição entre a proposta do texto e as atividades.

3. Em sala de aula, usamos a expressão "vai um" para uma adição com reserva. Você acha que essa forma de expressão ajuda o aluno a utilizar corretamente o algoritmo? Discuta os "prós" e os "contras" desta atitude e dê ênfase aos cuidados que o professor deve ter ao usar esta terminologia informal.

4. Elabore uma atividade para apresentar ao seu aluno a adaptação do algoritmo da adição para adições de mais de duas parcelas.

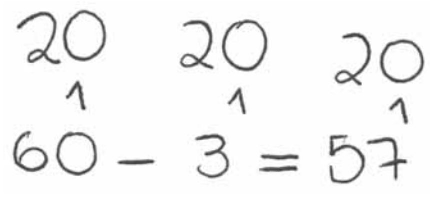
5. Na adição de <u>apenas duas parcelas</u>, é possível acontecer um "vão dois"? Explique sua resposta, dando significado à expressão "vão dois".

6. Na adição de <u>mais de duas parcelas</u>, é possível acontecer um "vão dois"? Explique sua resposta.

7. Você saberia dizer qual o menor número de parcelas que uma adição deve ter para que possa ocorrer um "vão quatro"? E para ocorrer um "vão sete"?

8. Elabore uma atividade para iniciar a idéia do "vão dois".

9. Para realizar uma adição de três parcelas iguais a 19 (ou seja: 19 + 19 + 19) João apresentou o seguinte registro:



(a) Explique o raciocínio utilizado por João, destacando as propriedades usadas.

(b) Compare esta estratégia com o uso do algoritmo, e dê sua opinião sobre qual das estratégias parece ser mais econômica.

10. Dê pelo menos três exemplos nos quais uma estratégia mental pode ser mais econômica e rápida para alguns alunos do que o uso do algoritmo. Dê preferência a exemplos vindos de sua sala de aula.

AULA 8

O ALGORITMO DA SUBTRAÇÃO

OBJETIVOS DESTA AULA

- Identificar as etapas do ensino do algoritmo da subtração.
- Indicar procedimentos que tornem o aluno capaz de subtrair corretamente.
- Identificar situações nas quais o algoritmo deve ser aplicado de forma crítica.

TEXTO PARA LEITURA

O algoritmo da subtração tem finalidade similar ao da adição, ou seja, sistematizar e facilitar o processo de cálculo, no caso, da subtração. Da mesma forma que discutimos na aula anterior, não podemos dizer que estamos fazendo uso do algoritmo quando pedimos aos alunos um "arme e efetue" em subtrações como "8 – 3=" ou "9 – 4=". Estes são fatos básicos da subtração, e é necessário conhecer estes resultados (e suas relações com os fatos básicos da adição) para que se possa utilizar o algoritmo da subtração com tranqüilidade e confiança.

O algoritmo da subtração deve ser apresentado quando as crianças já dominam, com certa segurança, o conceito da operação, o sistema de numeração, os fatos básicos da subtração e o algoritmo da adição. Novamente chamamos sua atenção para o fato de que a habilidade de utilizar o algoritmo corretamente requer tempo e prática, sendo necessárias diversas experiências preparatórias, variando-se bastante os valores numéricos.

Como as crianças já devem ter experiências anteriores com o algoritmo da adição, será mais natural compreender que este agora também deve ser iniciado pela ordem das unidades e com as ordens organizadas em colunas. No entanto, para ser capaz de compreender o algoritmo da subtração, nesta fase do aprendizado de Matemática, uma criança necessita relacioná-lo com o conceito da operação e com as ações que podem ser associadas à subtração. Desta forma, o professor deve estar atento para fazer conexões entre as diferentes ações associadas à subtração e ao algoritmo, permitindo que criança as realize de forma concreta.

Para facilitar a discussão das sugestões que apresentaremos, vamos apresentar desde já a nomenclatura associada ao algoritmo da subtração, lembrando que não há sentido em pedir aos alunos que memorizem estes termos. Como no caso da adição, o uso correto da linguagem, por parte do professor, fará com que os alunos assimilem, aos poucos, o vocabulário que for relevante ao seu momento de aprendizagem.

$$\begin{array}{rl} 36 & \text{minuendo} \\ -\,12 & \text{subtraendo} \\ \hline 24 & \text{resto ou diferença} \end{array}$$

SUGESTÕES DE ATIVIDADES

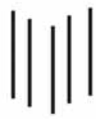
Ao iniciarmos o algoritmo da subtração, devemos usar, como na adição, materiais de contagem e o QVL. Lembramos que, dentre as ações associadas à subtração, a mais natural para a criança é a de retirar e por isso vale a pena iniciar o estudo do algoritmo da subtração usando esta idéia.

Atividades baseadas na ação de retirar

Para representar concretamente a idéia de retirar, a criança deve separar, de seu material de contagem, apenas a quantidade que representa o minuendo. A seguir, ela deve retirar deste grupo de objetos a quantidade que o subtraendo representa. A ação de retirar, da coleção de objetos que representa o minuendo, uma quantidade correspondente ao valor do subtraendo só faz sentido quando trabalhamos com apenas uma mesma coleção de objetos. Retiramos algo daquilo que temos!

Por meio de exemplos, vamos ver como atividades que exploram a ação de retirar podem ser desenvolvidas concretamente.

• Enuncie, oralmente, uma situação-problema envolvendo a ação de retirar 13 de 25 e peça aos alunos que arrumem 25 palitos em um QVL, como o do modelo abaixo. Você pode construir em papel pardo, por exemplo, quadros com apenas duas linhas para que os alunos, ou grupos de alunos, trabalhem independentemente.

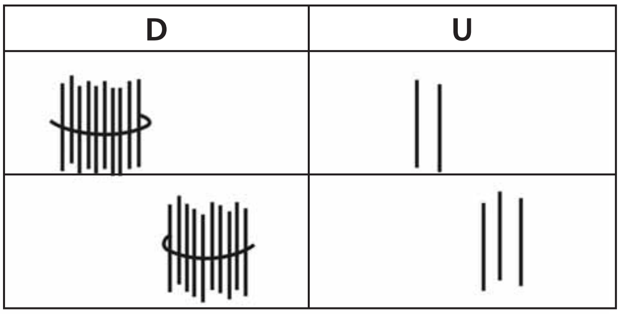
D	U
	

Diga aos alunos:

- *"Agora vamos resolver o nosso problema, ou seja, tirar 13 palitos dos 25 palitos".*

- *"Mude para a linha debaixo os palitos que representam a quantidade que você precisa tirar".*

- *"Quantos palitos permaneceram na primeira linha?"*



- *“Na primeira linha fica a quantidade de palitos que sobrou de 25 depois de tirarmos 13* (ou seja, o resto!)”.

Através de discussões, mostre às crianças que a quantidade de palitos da segunda linha representa o que foi retirado (subtraendo), e a quantidade que permanece na primeira linha é o resultado da operação, a quantidade que restou (resto ou diferença). Logo: 25 – 13 = 12.

Trabalhando com material concreto você pode propor diversas situações. Isto vai ajudar seu aluno a perceber a seqüência de ações que compõe o algoritmo. A representação, no caderno, dos passos realizados com material concreto também é importante para que o aluno, aos poucos, compreenda a relação entre estes passos e o registro formal do algoritmo.

Usando o exemplo anterior, veja como você pode estimular esta associação entre o concreto e a representação escrita.

- Após a representação do minuendo: *“Vamos representar este número no caderno? Façam um QVL e anotem esta quantidade de palitos”*

D	U
2	5

- Após a retirada dos 13 palitos (o subtraendo): *“Vamos anotar agora, abaixo do número 25, a quantidade de palitos que foi retirada.”*

	D	U
	2	5
–	1	3

- E para finalizar: *“Agora, para finalizar, vamos fazer um traço para separar o resultado final e anotar quantos palitos sobraram depois da retirada.”*

	D	U
	2	5
–	1	3
	1	2

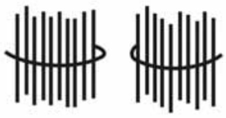
Vejamos outro exemplo no qual mostramos como usar estas idéias em uma subtração em que é preciso desfazer as dezenas rearrumando o minuendo.

• Crie uma situação-problema para os alunos subtraírem 5 de 32. Iniciamos por arrumar o minuendo na tabela.

D	U
	

D	U
3	2

Explique aos alunos que eles só possuem 2 unidades não agrupadas e por isso não podem retirar 5 unidades. No entanto, é importante que eles percebam que o número possui 32 unidades, e o que “atrapalha” a realização concreta da retirada é a forma como os objetos estão organizados. Assim, os alunos devem concluir que será preciso desfazer uma das dezenas (que contém 10 unidades). Após desamarrarem uma dezena e a passarem para a casa das unidades, os palitos ficarão com a seguinte disposição.

D	U
	

Esse é um bom momento para ajudá-los a perceber que o número representado continua sendo o mesmo (32). A decomposição é que mudou: a forma inicial (3 dezenas e 2 unidades) foi alterada para outra, em 2 dezenas e doze unidades.

Pergunte aos alunos:

- *“O número mudou?”* (não) *“Então, o que mudou?”* (a decomposição)

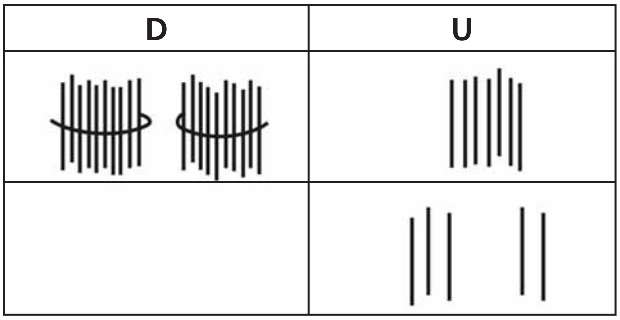
- *“Quantas unidades estão agora registradas na primeira ordem?”* (12)

- *“E agora, podemos tirar 5 unidades de 12 unidades?”* (sim)

- *“Com quantas unidades ainda ficamos?”* (7)

- *“Com quantas dezenas ainda ficamos?”* (2)

Bem, agora é possível retirar 5 palitos dos que ficaram na ordem das unidades e o material fica com a seguinte disposição no quadro:



	D	U
	3	2
−		5
	2	7

Observe que o registro escrito dos passos da operação pode incluir a passagem na qual uma dezena foi desagrupada em 10 unidades. Você pode, aos poucos, se os alunos sentirem necessidade, usar um registro que inclua esta troca.

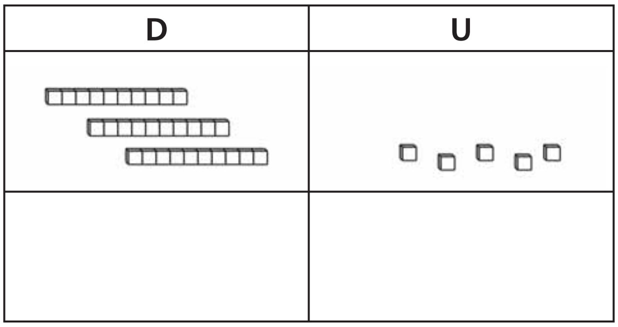
Repita a atividade com vários valores numéricos, até as crianças compreenderem bem o processo. Lembre-se que as atividades com material concreto são mais fundamentais e a representação numérica do algoritmo pode ir sendo introduzida aos poucos, mas não deve ser o foco principal das primeiras experiências.

	D	U
	$\cancel{3}$	$^{1}2$
−		5
	2	7

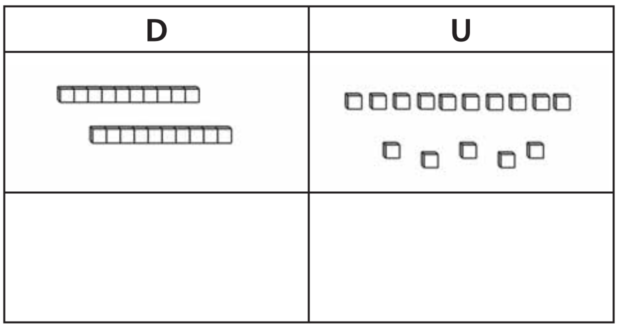
Varie os materiais de contagem, isto ajuda o aluno a compreender o processo sem se fixar no material, o que possibilitará a necessária abstração. Para ilustrar o uso de um outro material, vamos subtrair 17 de 35, usando o material dourado.

A representação gráfica da subtração por retirada ficará similar a esta.

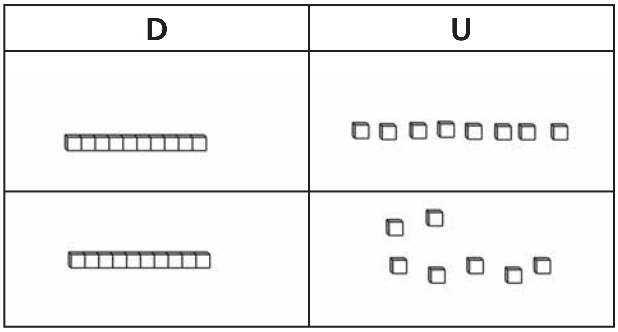
1º passo:
representar o minuendo (35)



2º passo:
desagrupar 1 dezena



3º passo:
retirar o subtraendo (17) e verificar quanto restou

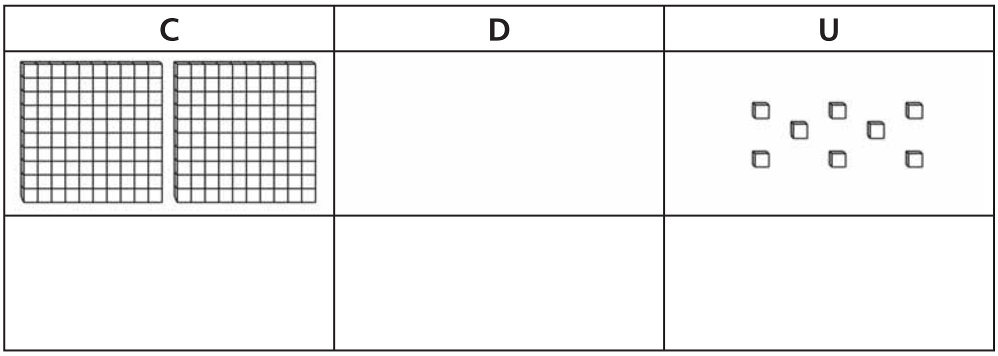


O modelo da retirada permite estabelecer, facilmente, uma associação entre o conceito e os passos do processo de cálculo (algoritmo) que a criança realiza. Além disso, você pode, mais uma vez, reforçar a idéia de operações inversas, estimulando a verificação dos resultados obtidos nos exemplos para mostrar que:

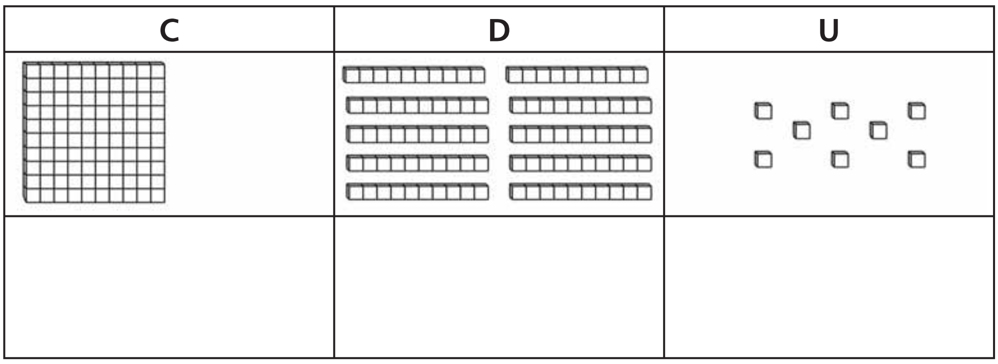
subtraendo + resto = minuendo

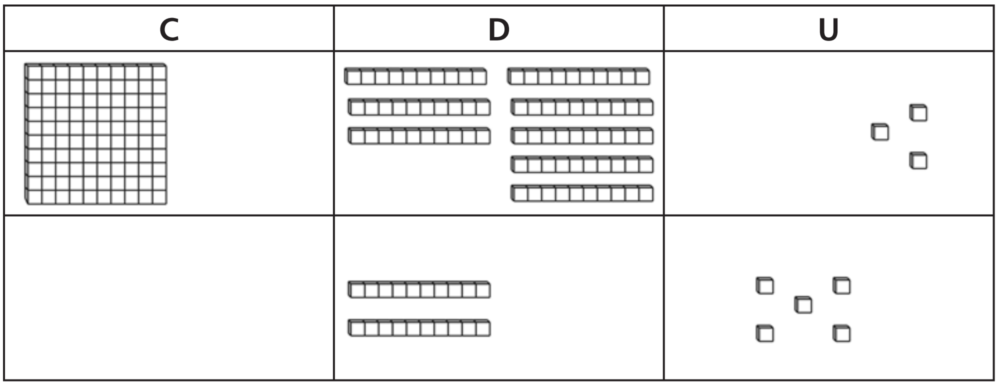
A seguir, apresentamos um exemplo no qual aparece o zero na casa das dezenas, fato que é considerado uma dificuldade nas operações de subtração. Mas este problema deixa de existir se trabalhamos com material concreto, não esquecendo de relembrar as características do sistema de numeração. Vamos tirar 25 de 208.

1º passo:
representar o minuendo (208)



2º passo:
desagrupar 1 centena





3º passo:
retirar 2 dezenas e 5 unidades verificando que na primeira linha restam 183 unidades.

Atividades baseadas na ação de comparar

Já destacamos que o professor deve conhecer e apresentar a seus alunos mais de uma forma de procedimento sempre que possível. Possibilitar que o aluno tenha a chance de experimentar diferentes ações é fundamental para que ele desenvolva o senso crítico e tenha o direito de escolher a estratégia com a qual mais se identifica, ou aquela que possibilita compreender melhor o que está fazendo. Muitas vezes, uma criança com dificuldade de compreender um procedimento ou conceito resolve este obstáculo inicial quando é apresentada a outros caminhos ou formas de raciocinar.

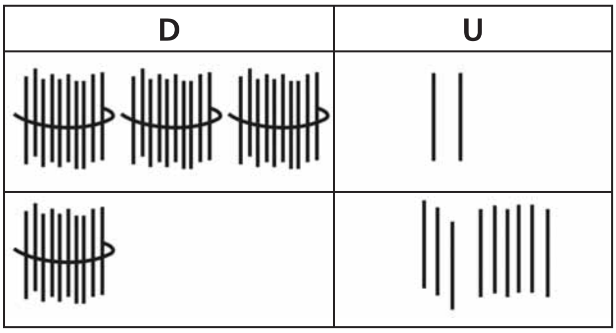
Trabalhar concretamente com a ação de comparar pode nos ajudar também a fazer a passagem do material concreto para o formato do algoritmo. As etapas registradas no QVL, com material concreto, se aproximam mais do registro a ser realizado no papel do que no caso anterior.

Como no caso da ação de retirar, por meio de exemplos mostraremos como as atividades que exploram a idéia da comparação podem ser desenvolvidas em sala de aula.

• Para subtrair 18 de 32, pergunte aos seus alunos

- *"Quantos palitos há a mais neste monte* (32) *do que nesse* (18)*?"*.

A seguir, apresente o material concreto e o QVL, sugerindo que eles coloquem o maior conjunto acima e, logo abaixo, o menor. O registro gráfico da experiência que eles estão realizando deve ficar assim:



D	U
3	2
1	8

Para dar início ao processo de subtração, os alunos precisam comparar as quantidades de palitos e, para isso, devem corresponder a cada um dos 18 palitos da coleção menor com cada um dos 32 palitos da coleção maior. Para orientar os alunos, você pode fazer as seguintes perguntas:

- *“Quem tem 32 palitos pode perder 18?”* (sim)

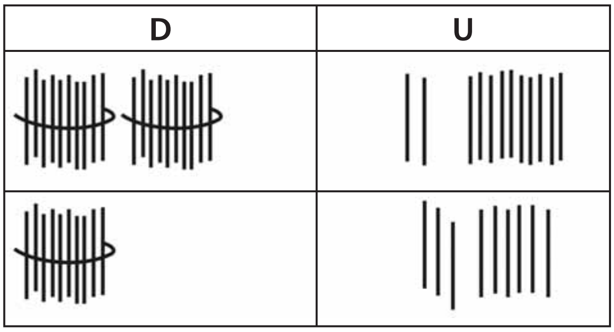
- *“Por quê?”* (porque 32 é maior do que 18)

- *“Então, quem tem 32 palitos tem 18?”* (tem)

- *“Muito bom! Mas da forma que os palitos estão arrumados é possível emparelhar os 18 palitos que existem nas duas coleções?”* (não)

- *“Por quê?”* (só há 2 palitos soltos nas unidades do número 32)

- *“Então, o que precisamos fazer primeiro?”* (desmanchar uma dezena do 32)



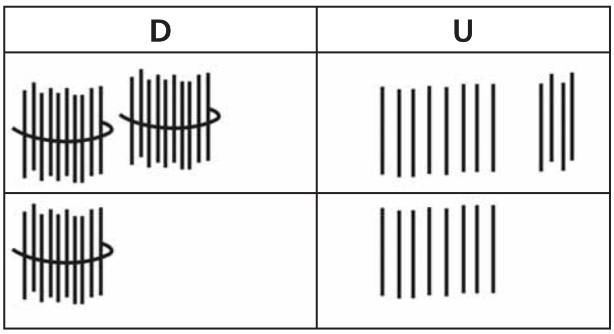
D	U
3	2
1	8

- *“E agora, depois de desmanchar uma dezena do 32, vocês podem fazer pares com os 18 palitos das duas coleções?”* (sim)

- *“Vamos fazer isso...”* (juntamos 1 amarrado da casa das dezenas de cada coleção e “casamos” 8 palitos soltos de cada coleção)

- *“Quantos palitos restaram sem par?”* (14 – 1 dezena e 4 unidades ficaram sem par)

- *“Isso mesmo, há 14 palitos a mais. Registre na linha do resto este valor.”*



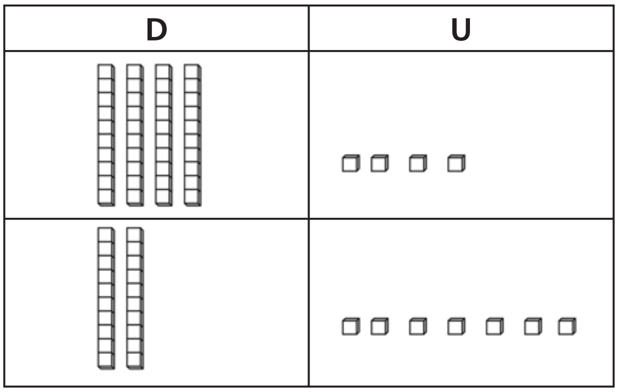
D	U
3	2
1	8
1	4

Observe que para poder fazer a correspondência, levamos os alunos a representar o valor do subtraendo e eles devem perceber que esta quantidade pode ser colocada em correspondência com parte do minuendo. Esta parte do minuendo, que pode ser emparelhada, será retirada do todo. No final do processo, também é a ação de retirar que nos deixa com a resposta para o problema de comparação, ou seja, pela retirada dos palitos emparelhados ficamos com a diferença entre as quantidades de palitos existentes nas duas coleções.

Reforçamos, mais uma vez, que é necessário realizar vários exemplos concretos, com valores diferentes, para que seus alunos possam realmente compreender o processo. Aos poucos, vá introduzindo o registro do algoritmo, acompanhando as etapas desenvolvidas com material.

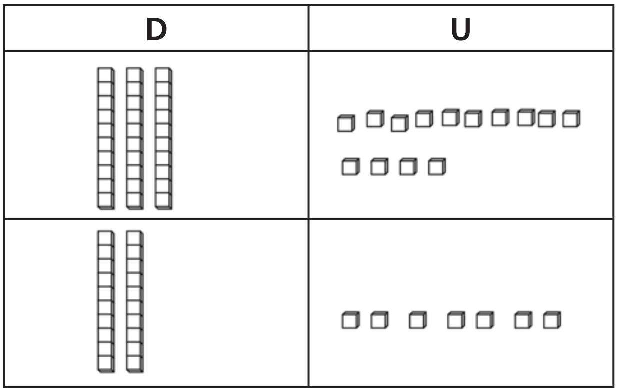
• Veja o exemplo da subtração 44 – 27 com material dourado. Os passos seriam registrados da seguinte forma:

1º passo:
representar o minuendo (44) e o subtraendo (27).
O aluno observa que não é possível formar pares com todas as unidades do subtraendo.



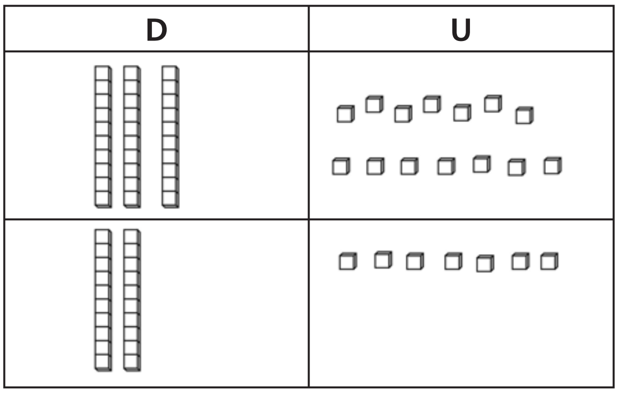
D	U
4	4
2	7

2º passo:
desagrupar 1 dezena.



D	U
$^{3}\cancel{4}$	14
2	7

3º passo:
emparelhar 2 dezenas e 7 unidades e verificar a diferença entre as duas quantidades.



	D	U
	$^{3}\cancel{4}$	14
–	2	7
	1	7

Aos poucos, os alunos devem ser incentivados a abrir mão do material concreto e trabalhar com a representação numérica no QVL, como mostrado a seguir para o mesmo exemplo, 44 –27.

	D	U
	4	4
–	2	7

→

D	U
$^{3}\cancel{4}$ →	$^{10}4$
2	7
1	7

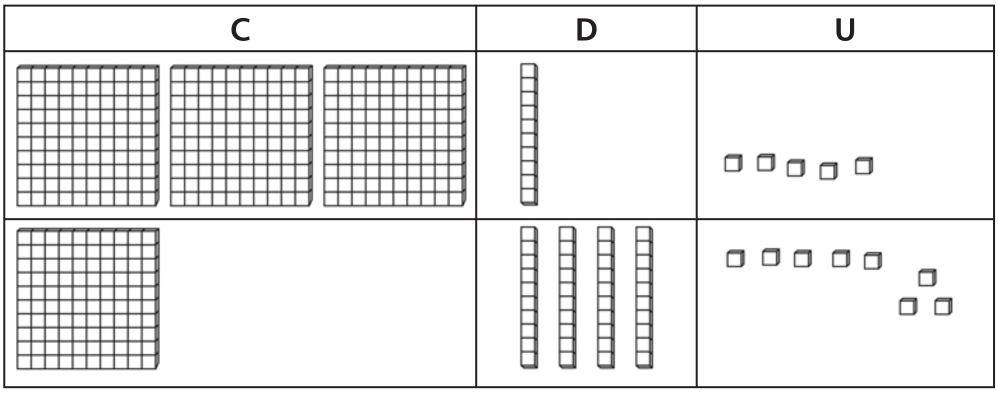
No entanto, a etapa de trabalho com material concreto poderá ser retomada sempre que situações mais difíceis forem introduzidas. Observe, inicialmente, uma situação que envolve duas ações de desagrupar.

• Vejamos a subtração 315 menos 148.

Inicialmente, colocamos estes valores no QVL e orientamos os alunos a perceberem que não é possível emparelhar os valores correspondentes ao subtraendo com os do minuendo, nem na ordem das unidades nem na ordem das dezenas.

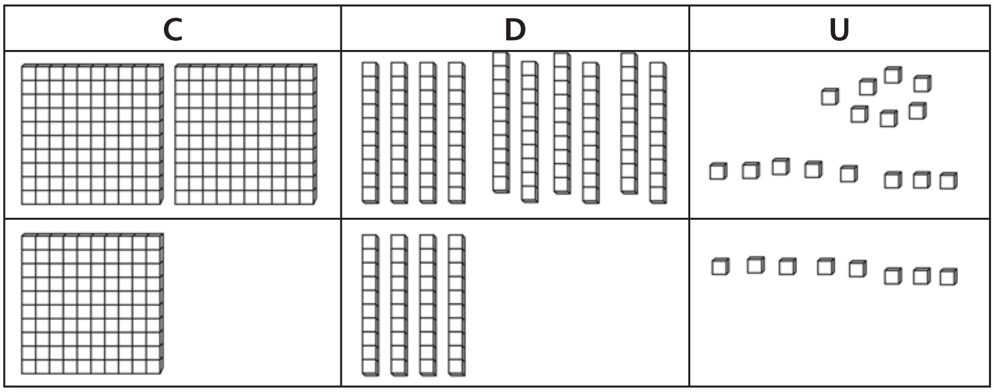
Assim, será necessário "desmanchar" dezenas e centenas no minuendo.

	C	D	U
	3	1	5
–	1	4	8



Alguns alunos farão estes desagrupamentos em duas etapas, enquanto outros farão ao mesmo tempo (você pode aproveitar estas oportunidades para comparar estratégias). De qualquer forma, o registro final obtido será:

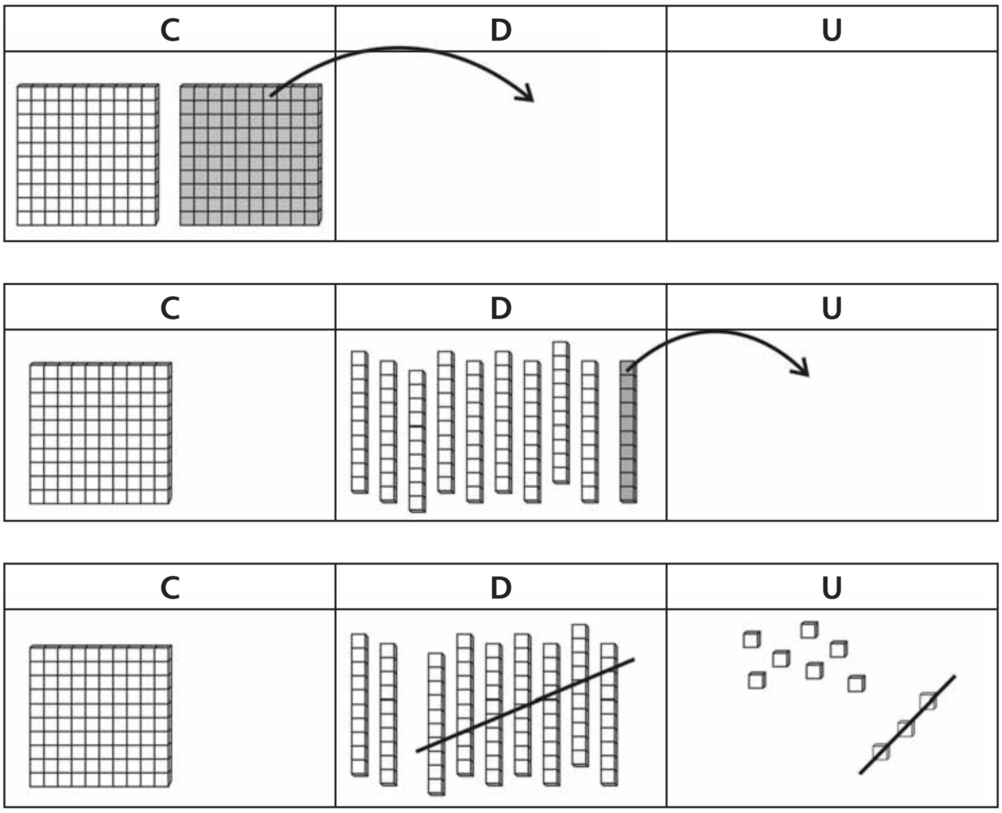
	C	D	U
	$^{2}\cancel{3}$	$^{+10}\cancel{1}$	$^{+10}5$
–	1	4	8
	1	6	7



No próximo exemplo, apresentamos uma situação com muitos zeros no minuendo, que é considerada difícil pelas crianças que não trabalham com suporte de material concreto.

- Vamos subtrair 73 de 200.

Ao tentar iniciar esta conta pelas unidades, o aluno percebe que será necessário desagrupar uma dezena. O problema, claro, é que não há dezenas disponíveis na segunda ordem, pois todas as dezenas de 200 estão agrupadas em centenas. Assim, será necessário desagrupar uma das centenas em dez dezenas e, a seguir, desagrupar uma destas dezenas em dez unidades. Abaixo, você pode ver as ações de desagrupar necessárias, realizados no QVL, usando o material dourado. Observe que seus alunos, depois das decomposições, podem resolver esta subtração tanto pela idéia de retirar quanto pela de comparar. Como vimos, para usar a ação de comparar, o aluno representaria em outra linha (abaixo da representação do 200 e de suas decomposições) o número 73, que será comparado com 200. Não esqueça que a representação numérica, também apresentada a seguir, precisa ser registrada em correspondência com as ações de reagrupar.



C	D	U
$^{1}\cancel{2}$	$^{\overset{9}{\cancel{10}}}0$	$^{10}0$
−	7	3
1	2	7

Para além das fronteiras

Atividades baseadas na ação *de completar* também podem ser utilizadas para fazer os cálculos de uma subtração. No entanto, esta forma de calcular está baseada em um raciocínio lógico bastante diferente daquele utilizado no algoritmo. Como já discutimos antes, a ação de completar invoca uma idéia aditiva (quanto falta para chegar à), o que permite explorar a subtração como operação inversa da adição.

Na seção "Escute seu Aluno" da *Aula 4,* mostramos algumas crianças resolvendo subtrações pela ação de completar e recorrendo à reta numérica como suporte. Estratégia similar é usada por muitos funcionários do comércio para dar o troco corretamente a seus clientes.

Se um cliente pagou uma despesa de R$ 16,20 com uma nota de R$ 50,00, o troco costuma ser calculado da seguinte forma:

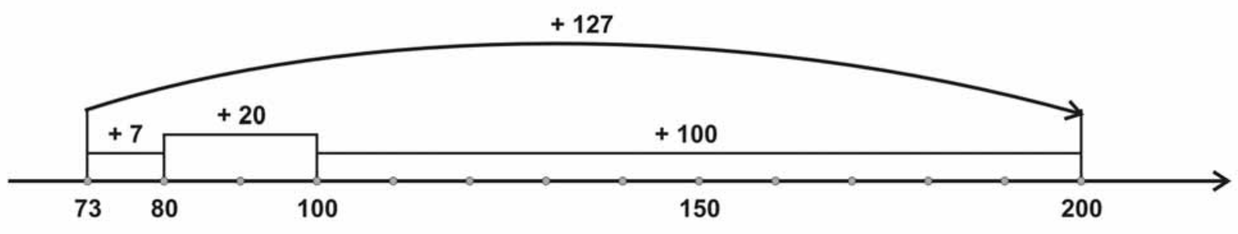
- inicialmente, preciso de 80 centavos para chegar a R$ 17,00 (próxima unidade);

- agora, necessito de mais R$ 3,00 para completar R$ 20,00 (próxima dezena); e

- mais R$ 30,00 para completar os R$ 50,00 (valor que se quer obter).

Ao adicionar os valores 30 + 3 + 0,80, obtenho R$ 33,80, que é o troco correto a ser dado ao cliente. Assim, o troco (que é a diferença entre R$ 50,00 e R$ 16,20) é obtido por uma estratégia aditiva.

Para algumas subtrações (especialmente aquelas com muitos zeros no minuendo), esta estratégia pode ser bem mais simples do que aplicar o algoritmo. Para que você possa comprovar isso, veja como pode ser feita a subtração 200 – 73, nosso último exemplo.



Iniciando em 73, preciso de <u>7 unidades</u> para chegar à próxima dezena (80). Necessito agora de <u>2 dezenas</u> para chegar à próxima centena (100); e mais 1 centena para chegar ao valor do minuendo (200).

Assim, a diferença entre 200 e 73 é de 1 centena + 2 dezenas + 7 unidades, ou seja, é igual a 127.

Com a ação de completar, o fato de a adição ser a operação inversa da subtração é usado explicitamente. Note que, conhecido o subtraendo, ele é usado como "ponto de partida" em uma adição imaginária, porque não conhecemos a outra parcela, mas conhecemos o "ponto de chegada" (o minuendo). O resultado da operação (resto da subtração) é exatamente o valor necessário para sair de um ponto e chegar ao outro.

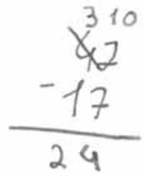
Primeira Escuta

ESCUTE SEU ALUNO

Selecionamos para você analisar junto conosco, as explicações de duas crianças sobre como fizeram para subtrair a operação "42 – 17", utilizando o algoritmo.

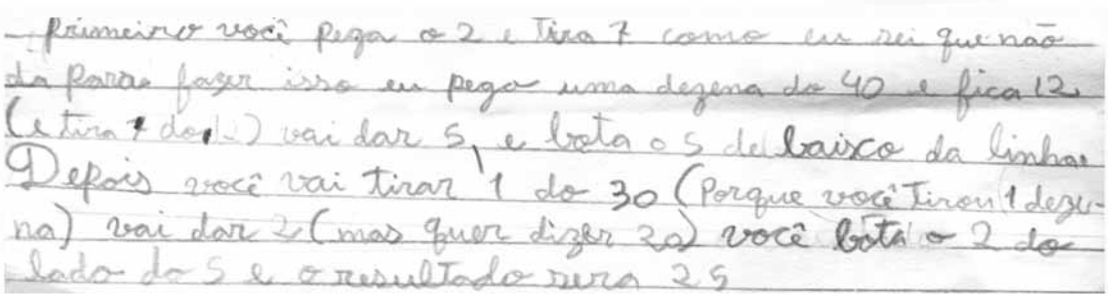
Paula:

Esta aluna registrou o algoritmo e deu a seguinte explicação oral.



"Aqui, como 2 menos 7 não dá, então você pega emprestado de 4, que é dezena neste número. Fica 3 na dezena e 12 na unidade e aí você soma. Na dezena você soma 3 e 1".

Glória:


– primeiro você pega o 2 e tira 7 como eu sei que não dá para fazer isso eu pego uma dezena do 40 e fica 12 (e tira 7 do 12) vai dar 5, e bota o 5 de baixo da linha. Depois você vai tirar 1 do 30 (Porque você Tirou 1 dezena) vai dar 2 (mas quer dizer 20) você bota o 2 do lado do 5 e o resultado sera 25

Paula mostra que entende o processo de "desmanchar" as dezenas utilizado no algoritmo e o explica em suas próprias palavras. Embora saiba fazer e compreenda o que está fazendo, Paula chama a operação que está realizando de "soma". Esse é um hábito comum em crianças nesta fase de escolaridade – talvez pelo fato de a adição ser a primeira operação estudada, seja muito comum que as crianças chamem qualquer operação de "soma". Aos poucos, o vocabulário correto vai sendo adquirido por ela, especialmente se o professor usar os termos corretos em sala. Paula também erra um fato básico (12 – 7 = 4!), o que também é bastante comum para os fatos básicos de minuendo maior que 10 e subtraendo até 9. Apesar destes pequenos erros, Paula demonstra ter segurança suficiente com o Sistema de Numeração para efetuar as ações de desagrupar necessárias à realização do algoritmo, compreendendo o que faz.

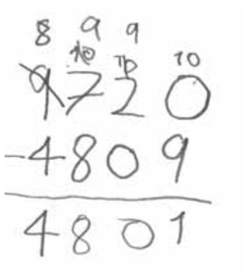
Glória também nos revela saber que os algarismos assumem diferentes valores, dependendo da ordem que ocupam no numeral. Observe também que ela compreende a lógica do algoritmo – e esta não é uma lógica simples! Ao justificar os "empréstimos", ela esclarece: "pego uma dezena do 40", dizendo ainda que "fica 12". Isto evidencia que ela compreende o grupo de unidades na dezena. Mais uma vez, consciente deste agrupamento de unidades na dezena, Glória se refere ao 3 da ordem das dezenas como 30 e faz questão de registrar que tirou 1 dezena, indicando que o resultado da operação nesta coluna *"vai dar 2 (mas quer dizer 20)"*.

Segunda Escuta

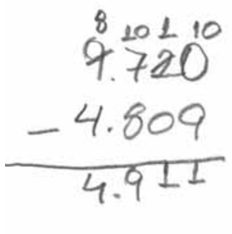
O uso do algoritmo deve ser estimulado e valorizado, especialmente quando se trata de números grandes. Entretanto, compreender as regras de uso do algoritmo, requer tempo e sucessivas elaborações por parte das crianças. Durante esse processo, o olhar do professor é fundamental para que possa intervir adequadamente na produção de cada aluno.

Observe como Bruna, Felipe e Fernanda realizaram a operação “9720 – 4809=”, utilizando o algoritmo.

Bruna



Felipe



Fernanda

Bruna demonstra ainda estar bastante confusa em subtrações nas quais há necessidade de reagrupar em diversas ordens. Parece que, ao perceber que será necessário desmanchar algum agrupamento, já que não é possível subtrair 9 de 0 na ordem das unidades, ela resolve agir diretamente sobre a maior ordem, decompondo o 9 que ocupa a ordem das unidades de milhar. Embora possamos questionar sua decisão, a ação de decomposição feita por Bruna, a princípio, foi correta e bem registrada (1 unidade de milhar é transformada em 10 centenas, das quais uma é transformada em 10 dezenas (restando 9 centenas); das dezenas, uma é transformada em 10 unidades, (restando 9 dezenas). A decisão tomada teve conseqüências com as quais Bruna não soube lidar, como mostram seus cálculos. Ainda sobre o trabalho de Bruna, veja o exercício 11.

Por outro lado, Felipe e Fernanda demonstram segurança para reagrupar apenas nas ordens em que este processo é necessário. A diferença entre os dois trabalhos está na forma como registram suas decomposições. Enquanto Felipe deixa claro que, toma emprestado “1” em uma determinada ordem e que este “1” vale 10 quando somado à ordem imediatamente inferior, Fernanda mostra a retirada feita e apenas registra o “1” na frente do algarismo que ocupa a ordem inferior, obtendo números de dois algarismos. Para nós, que não acompanhamos o processo de aprendizagem de Fernanda, apesar de seu registro “econômico”, é possível perceber que ela sabe como utilizar o algoritmo.

LEMBRE-SE Para trabalhar o algoritmo da subtração com as crianças, da forma como propomos nessa aula, é necessário que ela tenha bom conhecimento das ações associadas a esta operação – as mesmas que foram utilizadas para ajudar a desenvolver o conceito. Assim, fica claro, mais uma vez, que a construção do conceito é a base para a compreensão do algoritmo. Além disso, como já chamamos sua atenção na aula anterior, não adianta sabermos usar uma técnica operatória se desconhecemos quando ela deve ser aplicada. A memorização dos fatos básicos (que deve acontecer de forma natural), a capacidade de aplicar as propriedades e a compreensão do Sistema Decimal de Numeração (refletida nas ações de grupar e desagrupar) são outros fatores decisivos no bom uso do algoritmo da subtração.

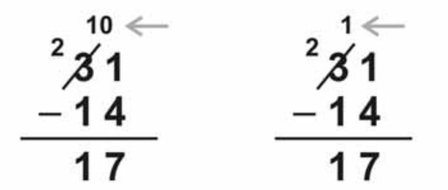
Perceber a adição e a subtração como operações inversas (reconhecendo que o minuendo é o resultado da adição do resto com o subtraendo), permite que um processo sistemático diferente do algoritmo seja utilizado: aquele baseado na ação de completar. Estratégias como estas podem tornar a subtração muito mais simples, especialmente aquelas em que o algoritmo é bastante trabalhoso. No entanto, lembre-se que a escolha da “melhor estratégia de cálculo” é pessoal (o melhor para um não é, necessariamente, o melhor para outro) e exigirá, do aluno, senso crítico e capacidade de analisar as situações que lhe são propostas – habilidades importantes para toda a vida.

ATIVIDADES PARA O PROFESSOR

1. Contando Casos: faça um pequeno relato sobre uma experiência com seus alunos, que esteja relacionada com os temas discutidos nesta aula.

2. Em sala de aula, é comum o uso da expressão “pedir emprestado” para uma subtração na qual é necessário desfazer um agrupamento em uma ordem para poder efetuar os cálculos em uma ordem anterior. Você acha que essa forma de expressão ajuda o aluno a utilizar corretamente o algoritmo? Discuta os “prós” e os “contras”, enfatizando os cuidados que o professor deve ter ao usar esta terminologia informal.

3. Observe as duas formas de registro da ação de desagrupar uma dezena para a ordem das unidades.



Qual das duas formas você acha que mais contribui para que o aluno utilize corretamente o algoritmo? Discuta os “prós” e os “contras” de cada uma delas, e o que o professor precisa garantir que a criança tenha em mente em cada situação.

4. Crianças que não compreendem o algoritmo costumam cometer os mesmos erros, sistematicamente. Em geral, estes erros são decorrentes da utilização de um procedimento incorreto durante a execução do algoritmo. Em cada um dos itens abaixo, apresentamos alguns resultados incorretos obtidos pelas mesmas duas crianças utilizando o algoritmo. Tente explicar o erro sistemático que está sendo cometido por cada uma delas:

(a) Pedro: 42 – 38 = 16; 105 – 37 = 132; 200 – 132 = 132.

(b) Bia: 42 – 38 = 14; 105 – 37 = 178; 200 – 132 = 178.

5. (a) Proponha uma atividade para ajudar Pedro a perceber seu erro e a desenvolver a estratégia correta.

(b) Proponha uma atividade para ajudar Bia a perceber seu erro e a desenvolver a estratégia correta.

6. Ada pediu que seus alunos resolvessem o desafio de descobrir os algarismos escondidos sob pedaços de papel na subtração abaixo:

Resolva esse desafio você também, descrevendo o processo e justificando sua resposta.

$$\begin{array}{r} 3\ 7\ \square \\ -\ 1\ \square\ 4 \\ \hline \square\ 9\ 6 \end{array}$$

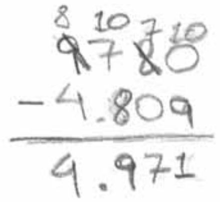
7. Ada comentou que o exercício acima foi bastante útil para que os alunos explorassem a adição e a subtração como operações inversas. Você concorda com Ada? Por quê?

8. Resolva as subtrações abaixo de duas formas: usando o algoritmo e o método de completar.

(a) 278 – 145 (b) 321 – 176 (c) 3060 – 1643 (d) 40 000 – 12 173

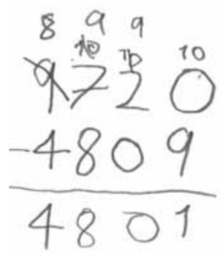
9. Para cada um dos itens da questão anterior, responda: Qual foi a conta mais fácil? Qual foi a conta mais rápida de fazer? Dê sua opinião, justificando-a brevemente.

10. Luiza estava subtraindo 4 809 de 9720. Observe que, ao "riscar" o 2 que ocupa a ordem das dezenas no minuendo, o número riscado ficou muito parecido com um 8.



Imagine que esta é uma questão (valendo 10 pontos) em um teste. Quantos pontos você daria para Luiza? Justifique sua decisão.

11. Abaixo, pela segunda vez, você encontra o trabalho de Bruna, que já havíamos comentado na seção "Escute seu aluno". Dissemos que, embora pouco prático, não há erros na forma com que Bruna reagrupou o minuendo. Para você se convencer que a conta com os agrupamentos propostos por Bruna é possível de ser feita, ponha a "mão na massa" e faça-a você mesmo, registrando e justificando cada um de seus passos.



AULA 9

AÇÕES ASSOCIADAS ÀS OPERAÇÕES DE MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

OBJETIVOS DESTA AULA

• Propor atividades que favoreçam a conceituação de multiplicação e divisão.

• Identificar a importância de trabalhar, concomitantemente, a divisão e a multiplicação.

TEXTO PARA LEITURA

Os conceitos ligados à multiplicação, como os de adição, são fundamentais para o desenvolvimento de muitos outros conceitos aritméticos. Caso não os domine, a criança conseguirá, no máximo, memorizar os fatos básicos e realizar de forma mecânica o processo de cálculo (isto é, o algoritmo) posteriormente. A dificuldade nesta memorização será muito grande e a insegurança se tornará clara quando ela tiver de resolver um problema: ela provavelmente não será capaz de se decidir sobre qual operação realizar.

Da mesma forma, os conceitos relacionados com a divisão de números naturais desempenharão um papel decisivo nas aprendizagens de outros tópicos da Matemática, como os conceitos de números fracionários e decimais.

Como fizemos com a adição e a subtração, sugerimos que os alunos realizem atividades para a conceituação da multiplicação e da divisão, concomitantemente. Isto não significa que todos os alunos adquiram os dois conceitos ao mesmo tempo e do mesmo modo. No entanto, a criança que compreende convenientemente a relação multiplicação/divisão terá mais facilidade na aprendizagem do algoritmo da divisão, que tanta "dor de cabeça" tem causado a professores e alunos de um modo geral.

Atividades que levem à formação de um conceito devem ser baseadas em experiências concretas, nas quais os alunos terão oportunidade de construir e, com o tempo, aperfeiçoar e transferir tais conceitos. O professor deve proporcionar à criança múltiplas oportunidades de trabalho com material concreto para que ela chegue à representação dos fatos básicos, compreendendo o significado da operação.

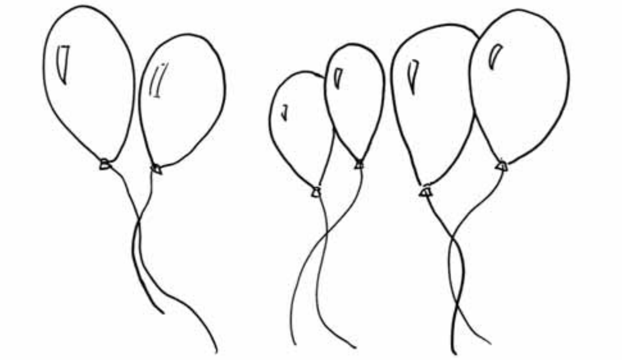
A multiplicação

A multiplicação de dois números naturais pode ser trabalhada sob dois enfoques:

a) como adição de parcelas iguais.

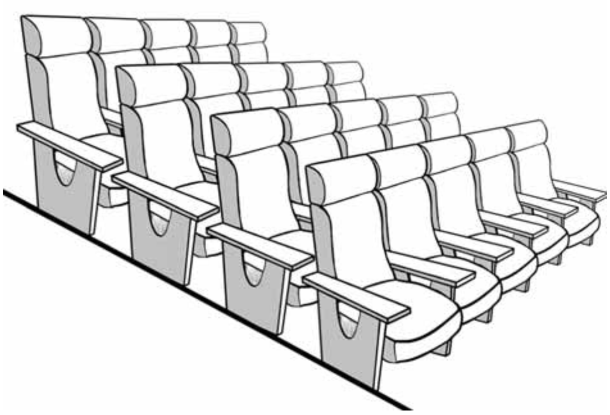
Por exemplo:

3 x 2 = 2+2+2 = 6



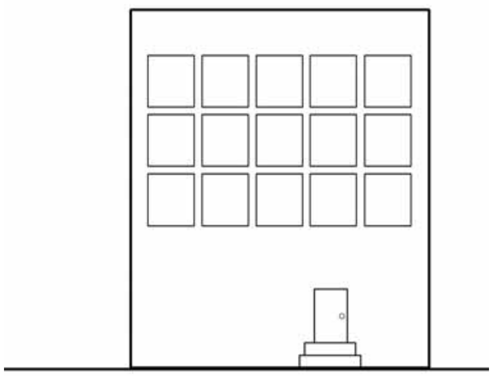
O primeiro enfoque da adição de parcelas iguais é trabalhado concretamente através de experiências como a apresentada a seguir: diante de 3 caixas com 5 bolas cada uma, a criança será levada a reuni-las, formando um único grupo e exprimindo sua ação como tendo reunido três grupos de cinco. O resultado desta ação pode ser obtido somando-se 5+5+5 = 15; num segundo momento, registrando que o 5 se repete 3 vezes com notação semi–algorítmica, ou seja, 3 vezes 5 = 15 e, mais tarde, utilizando a linguagem matemática, 3 x 5 = 15.

b) como número de elementos em um arranjo retangular.



Os arranjos retangulares são importantes, primeiro porque são muito comuns no dia a dia. Aparecem em caixas de ovos, arrumação de poltronas em teatros e cinemas, janelas em prédios de apartamentos, etc.

Em segundo lugar, eles facilitam a percepção de certas propriedades da multiplicação. Por exemplo: se fizermos um arranjo retangular de 5 colunas e 3 linhas, podemos encontrar o total de 15 objetos fazendo 3 x 5 = 15, pois temos 3 fileiras com 5 objetos em cada uma. Mas também é correto encontrar o total fazendo 5 x 3 = 15, pois há 5 colunas com 3 objetos em cada uma.

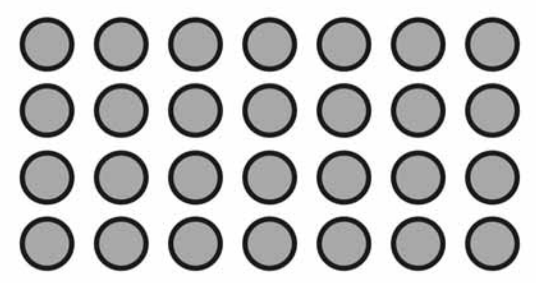


Observe ainda que o professor poderá iniciar o estudo da multiplicação com a idéia de arranjos retangulares a partir da organização de dados para resolver problemas de adição de diversas parcelas iguais.

Por exemplo:

Cada um dos quatro filhos de Dona Ana tem 7 bolas de gude. Quantas bolas de gude eles têm juntos?

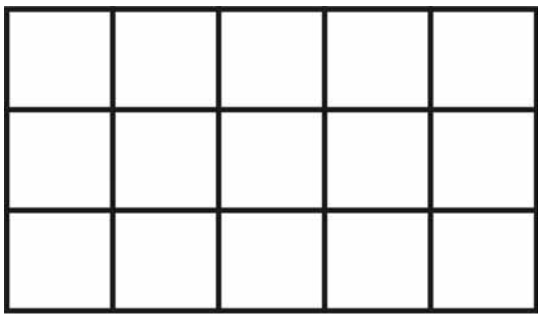
Sugira a seus alunos que representem as bolas de gude em uma tabela para facilitar a contagem. A representação ficará assim:



Para além das fronteiras

Há ainda outras razões importantes que justificam a ênfase nos problemas que envolvem a organização retangular:

1. Eles se relacionam diretamente com o estudo de áreas de retângulos. Por exemplo, se na figura abaixo considerarmos que o retângulo representado tem lados 5 e 3, vemos que é possível encaixar exatamente 15 quadrados de lado 1 (a unidade de área usual) neste retângulo. Assim, dizemos que sua área é igual a 15.

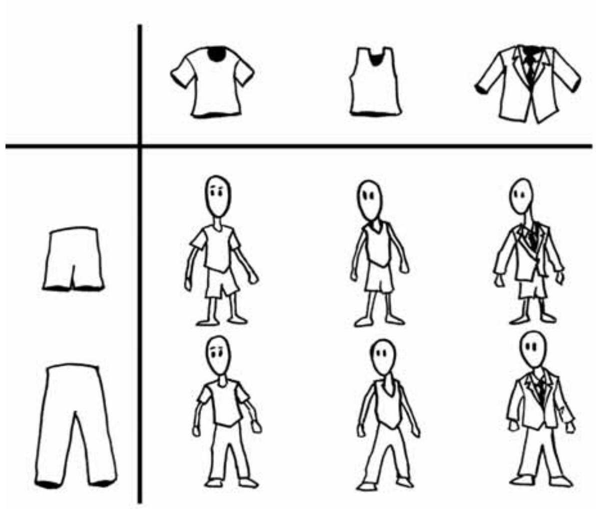


2. Os arranjos retangulares também se relacionam diretamente com a organização de dados em tabelas, permitindo o estudo das diversas possibilidades de combinar dados. Desta forma, os alunos podem ser apresentados, de modo natural, ao raciocínio combinatório.

Por exemplo:

"Se um menino tem 2 calças e 3 camisas, de quantas maneiras ele poderá se vestir?"

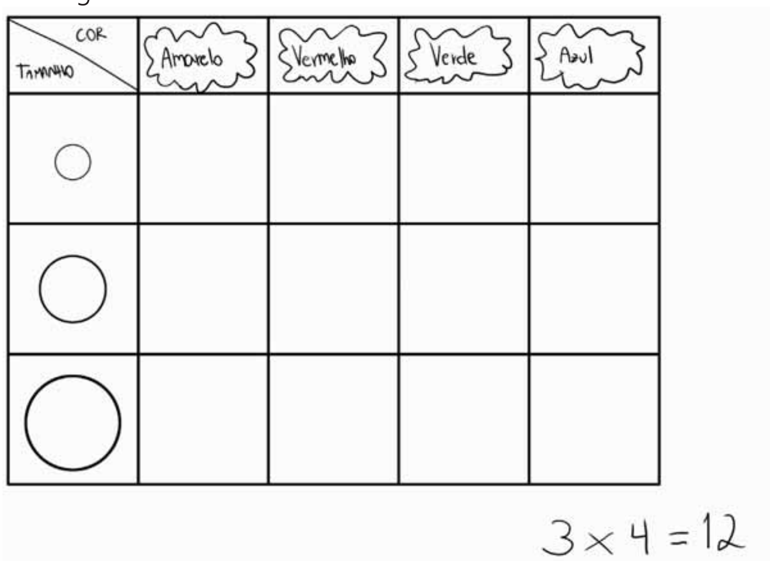
$\boxed{2 \times 3 = 6}$

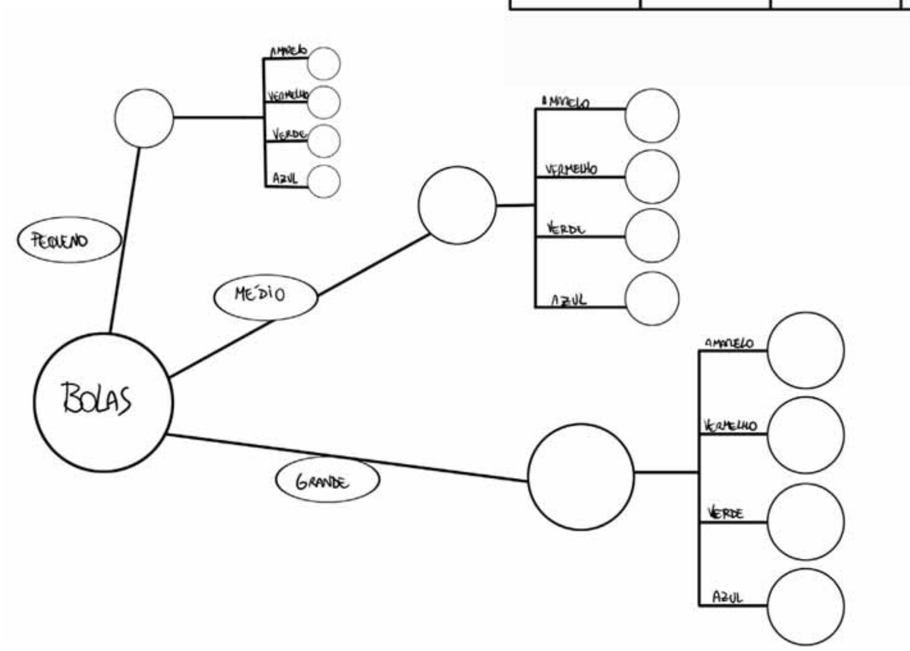


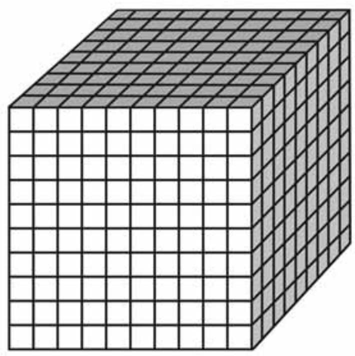
Esta forma de pensar e de organizar dados também será necessária à resolução de alguns problemas, como o exposto a seguir:

- *"Uma indústria de brinquedos fabrica bolas de 3 tamanhos: pequeno, médio e grande; e de 4 cores: amarelo, vermelho, verde e azul. Quantas bolas diferentes a fábrica produz?"*

Apresentamos abaixo dois esquemas de solução. O primeiro organiza os dados na forma de tabela e o segundo na forma de árvore.







3- A idéia conceitual associada inicialmente aos arranjos retangulares pode ser generalizada para incluir um número maior de multiplicações. Por exemplo, quando consideramos o volume de um paralelepípedo retângulo no espaço:

Volume de um cubo de dimensões 10 x 10 x 10 = 1 000.

Uma outra possibilidade de generalização ocorre no raciocínio combinatório, aumentando o número de atributos considerados. Assim, no exemplo da fábrica de brinquedos acima, imagine que as bolas podem ser feitas em dois materiais (couro ou plástico). Para cada uma destas opções, uma árvore de possibilidades igual a anterior seria aberta e teríamos um total de 2 x 3 x 4 = 24 tipos diferentes de bolas.

A divisão

A divisão também tem dois enfoques. De início, a criança será levada a explorar apenas a chamada *divisão-repartição*, para chegar depois à *divisão-comparação* ou medida.

a) Divisão *repartição*:

A ação de repartir se encontra em situações nas quais é conhecido o número de grupos que deve ser formado com um certo total de objetos, e é preciso determinar **a quantidade de objetos de cada grupo**.

Por exemplo:

"12 lápis precisam ser separados em 4 grupos iguais. Quantos lápis haverá em cada grupo?"

b) Divisão *comparação* ou *medida*:

Ações que envolvem este tipo de divisão são encontradas em situações nas quais é preciso saber **quantos grupos** podemos formar com um certo total de objetos, sendo conhecida a quantidade que cada grupo deve ter.

Por exemplo:

- *"12 lápis serão separados em grupos de 3 lápis cada um. Quantos conjuntos serão feitos?"*

Em atividades que envolvem a *divisão-repartição*, a criança sabe, por exemplo, que deve distribuir os 12 lápis em 4 caixas ou pelos 4 cantos da mesa. Isto permite a aplicação de uma estratégia simples: ela pode fazer a distribuição colocando 1 lápis de cada vez, até que os lápis se esgotem. Com esta ação ela verifica, então, quantos lápis ficaram em cada caixa ou canto da mesa.

Já na *divisão-comparação*, a criança tem os mesmos 12 lápis sobre a carteira e sabe que deve formar grupinhos de 3 lápis. Ela deverá aplicar outra estratégia: separar seu material de 3 em 3 e verificar, ao final da atividade, a quantidade de grupos formados.

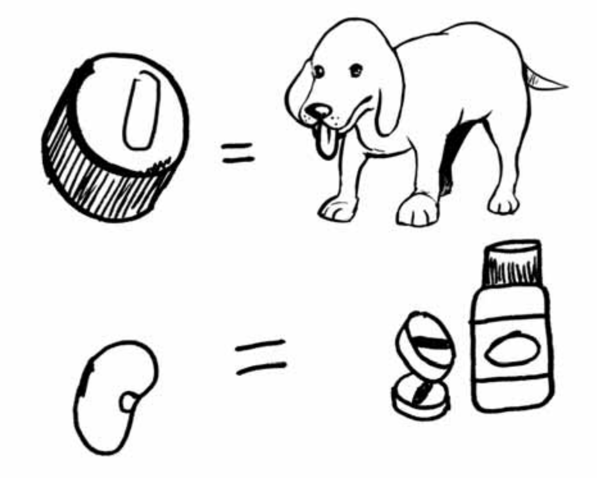
SUGESTÕES DE ATIVIDADES

As sugestões apresentadas visam incentivar a exploração concreta das ações associadas às operações de multiplicação e divisão.

Atividades que levam à conceituação da multiplicação e da divisão

• Brincando de Veterinário

Material necessário: tampinhas de refrigerante para representar os animais e grãos (feijão ou milho, por exemplo) para representar os remédios.



Materiais simples são usados para aprender o conceito das duas ações: divisão e multiplicação.

Inicie como se fosse uma brincadeira, contando uma pequena história sobre um veterinário que, para cada tipo de tratamento, anotava o número de animais tratados e o número de comprimidos dados por dia.

a) Explique às crianças que as tampinhas serão os animais e os grãos serão os comprimidos. Faça com eles o primeiro exemplo que pode ser apresentado no flanelógrafo ou no quadro-de-giz.

"O veterinário recebeu 3 cachorrinhos com a mesma doença". Espere que todos os alunos separem 3 tampinhas sobre sua carteira. Diga, então, que cada cachorrinho tomou 4 comprimidos durante o dia e verifique se todos os alunos colocaram 4 grãos dentro de cada tampinha.

Pergunte quantos comprimidos o veterinário gastou, deixando os alunos contarem os grãos antes de responder.

Apresente no flanelógrafo, no retroprojetor ou no quadro-de-giz outras situações (outros tratamentos feitos pelo veterinário) com desenhos representando animais e comprimidos. Cada aluno reproduz a situação em sua carteira, utilizando as tampinhas e os grãos.

Faça, para cada nova situação apresentada, as seguintes perguntas:

- *"Quantos animais?"*

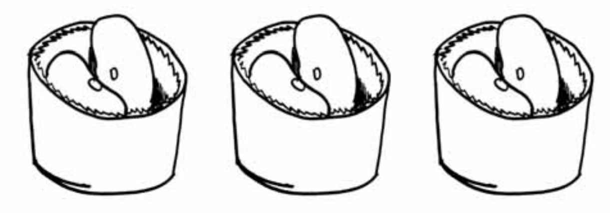
- *"Quantos comprimidos para cada animal?"*

- *"Qual o total de comprimidos gastos?"*

b) Para ajudar seus alunos a lidar com dados apresentados em tabelas, passe a apresentar as situações sob esta forma, escrevendo no quadro-de-giz:

Nº de animais	3
Nº de comprimidos por animal	2

Os alunos representarão sobre suas carteiras:



... e responderão:

Nº de animais	3
Nº de comprimidos por animal	2
Total de comprimidos gastos	6

Faça vários exemplos com seus alunos e deixe-os registrados no quadro-de-giz, formando tabelas como a seguinte:

Nº de animais	3	1	7	6	3	7
Nº de comprimidos por animal	2	3	2	5	3	5
Total de comprimidos gastos	6	3	14	30	9	35

c) Distribua tabelas pequenas para que os alunos representem as situações na carteira e registrem o total de comprimidos gastos.

Número de animais	4	5	2	6
Número de comprimidos por animal	2	1	3	4
Total de comprimidos gastos				

d) Agora, o objetivo é que os alunos, já sabendo o número de animais e o total de comprimidos gastos, encontrem o número de comprimidos dados a cada animal em tratamento.

Conte aos alunos que, um dia, o veterinário não anotou quantos comprimidos deu a cada animal, mas sabia quantos animais tinha recebido para tratar e podia descobrir, nas caixas de comprimidos, o total de comprimidos gastos.

Manipulando as tampinhas de refrigerante e os grãos (feijão ou milho, por exemplo), os alunos deverão encontrar o número de comprimidos dados para cada animal.

Por exemplo:

Total de comprimidos gastos	10
Número de animais	5

Os alunos separam 10 grãos e 5 tampinhas e vão distribuindo os grãos para encontrar:

Número de comprimidos para cada animal: 2

Faça vários exemplos com os alunos, sempre com novos valores numéricos e depois distribua tabelas pequenas para que eles trabalhem independentemente.

• A Bota de Muitas Léguas

Material necessário: Folha com várias retas numéricas e dois conjuntos de cartões numerados de 1 a 5.

a) Conto:

Pergunte se algum aluno conhece a história da "bota de sete léguas"[1]. Se alguém conhecer, peça-lhe que a conte. Caso ninguém conheça, faça você mesmo um resumo e então pergunte:

- *"Quanto media cada pulo dado com a bota?"*

- *"Se a bota andava 14 léguas, quantos pulos dava?"*

- *"Se a bota dava 3 pulos, quantas léguas andava?"*

À medida que você vai fazendo cada pergunta, espere até que os alunos encontrem as respostas. Em caso de dificuldade, ajude-os a chegar aos resultados, observando:

- *"Se 2 pulos são 14 léguas, mais um pulo são 14+7 = 21, logo, 3 pulos são 21 léguas".*

Proponha então:

- *"Vamos, agora, brincar com uma bota que dá pulos do comprimento que quisermos".*

[1] O conto da "Bota das 7 Léguas" faz parte do repertório dos contos de fadas universais e tem muitas versões, mas todas falam da bota de um gigante que foi usada por um menino. O passo do gigante media 7 léguas, e quando o menino calçou a bota mágica, começou a dar passos deste tamanho. Os detalhes podem ser pesquisados (ou até inventados) junto com as crianças.

Peça a um aluno que sorteie um cartão numerado. Este primeiro número sorteado indica o número de pulos que a “bota” dará.

Peça a outro aluno que sorteie um cartão numerado. Este segundo número sorteado indica o comprimento de cada pulo.

Inicialmente, desenhe uma semi-reta graduada no chão (ou use uma faixa de papel graduada). Um terceiro aluno, brincando de ter calçado a bota, dará os pulos sobre a semi-reta, e a turma verificará o número no qual ele parou.

Você pode dividir a turma em duas equipes e propor que disputem quem calçou a bota que levou mais longe.

Por exemplo:

Equipe A	Equipe B
Número de pulos: 2 Comprimento do pulo: 3	Número de pulos: 4 Comprimento do pulo: 2

Neste exemplo, ganha a equipe B, cujo representante chegou a um número maior.

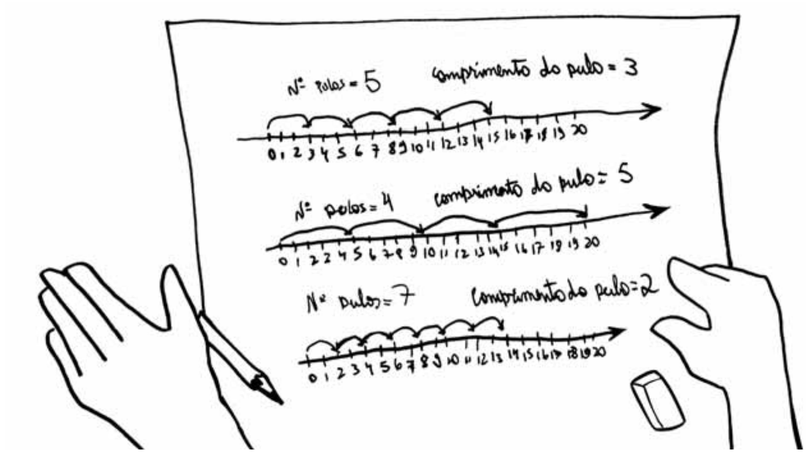
b) Usando a reta numérica

O modelo da reta numérica será de grande utilidade na conceituação da multi-plicação e da divisão. Apresentamos abaixo diver-sos tipos de atividade que podem ser desenvolvidas com seus alunos.

Primeiro tipo de atividade

Distribua as folhas com as retas numéricas para que os alunos representem os pulos da “bota” utilizando flechas e depois verifiquem em qual número a “bota” chegou. Cada folha pode conter 3 jogadas.

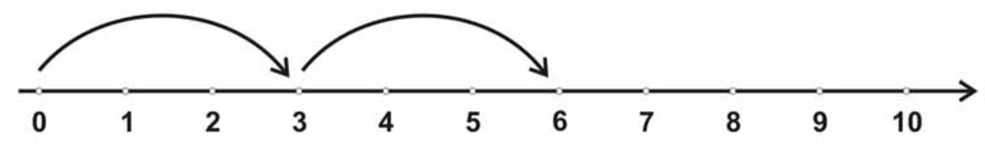
Peça aos alunos que façam o sorteio e cantem para a turma o número de pulos (1º sorteio) e o comprimento de cada pulo (2º sorteio). Espere que todos os alunos façam suas representações, antes da próxima jogada.



As crianças representam os “pulos” da bota em retas numéricas.

Você pode aumentar o conjunto de cartões para introduzir outros fatos básicos, lembrando que as semi-retas devem ser numeradas com todos os resultados possíveis. Por exemplo, se você utilizar cartões numerados até 9, a semi-reta deve ser numerada até 81.

Desenhe no quadro-de-giz alguns movimentos da "bota", por exemplo:



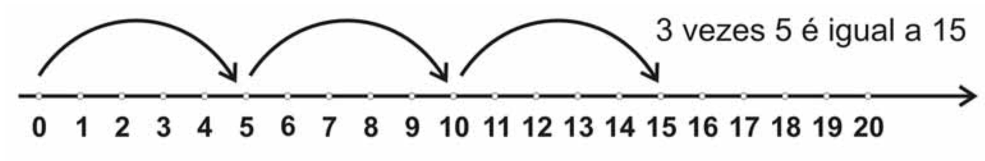
Oriente seus alunos a perceber que:

- *"As flechas dizem que duas vezes três é igual a seis".*

Repita a atividade com outros valores, pedindo aos alunos que anotem, abaixo de cada reta, o que elas "dizem":

Por exemplo:

Número de pulos: 3 Comprimento do pulo: 5



Segundo tipo de atividade

Combine com seus alunos uma nova estratégia para o jogo.

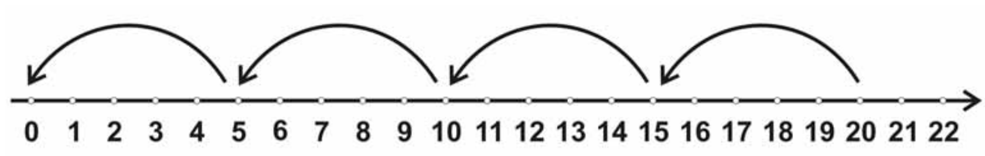
Agora, um aluno vai sortear um número, que indicará o comprimento do pulo que a "bota de muitas léguas" pode dar, e você (professor) dirá o número da reta (múltiplo do número sorteado) onde a "bota" está parada esperando para voltar ao zero (ponto de partida). O jogo é descobrir quantos pulos a "bota" precisa dar.

Por exemplo:

Um aluno sorteia o número 5.

Os alunos anotam então o comprimento do pulo: 5

Agora você imagina que a "bota" está, por exemplo, esperando no número 20 (que é múltiplo de 5), para voltar. Os alunos circundam o número 20 na reta e representam os movimentos, agora em sentido contrário.



Os alunos então completam:

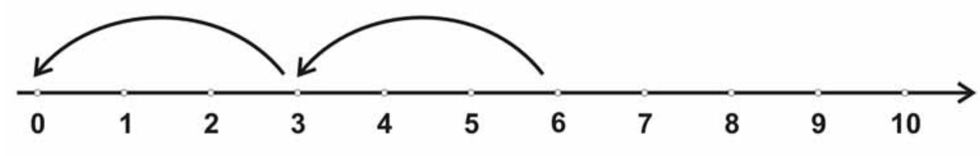
Número de pulos: 4

Quando as crianças já souberem encontrar, sem erro, o número de pulos (de um dado comprimento) necessários para voltar de um certo número, você pode passar a propor um novo desafio, como o da atividade que apresentamos a seguir.

Terceiro tipo de atividade

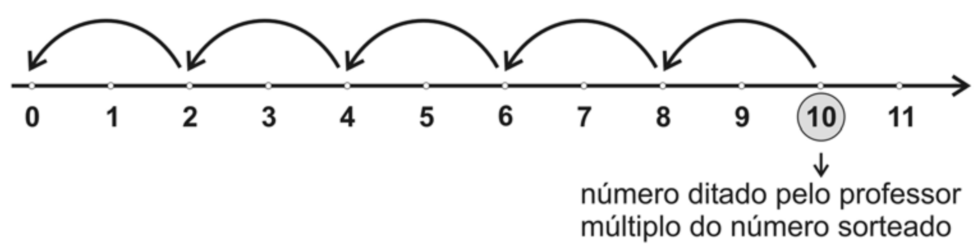
Desenhe no quadro-de-giz uma das situações representadas na atividade anterior e diga aos alunos que, agora, flechas em sentido contrário dizem:

- *"No comprimento 6 há 2 pulos de comprimento 3".*



Faça outros exemplos e depois repita esta atividade, acrescentando um registro abaixo de cada reta.

Por exemplo:



Comprimento do pulo: 2 (número sorteado)

Número de pulos: 5

No comprimento 10 cabem 5 pulos de comprimento 2. Mais tarde, você poderá ir substituindo a frase pelos símbolos matemáticos convenientes, como abaixo:

$$10 \div 2 = 5$$

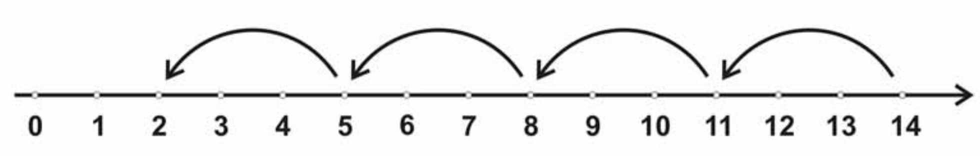
Também é importante apresentar situações na reta numérica na qual a divisão não seja exata. Por exemplo:

Comprimento do pulo: 3 (número sorteado)

Ponto de partida: 14

Número de pulos: 4

No comprimento 14 cabem 4 pulos de comprimento 3, e ainda faltam 2 unidades para voltar ao zero.



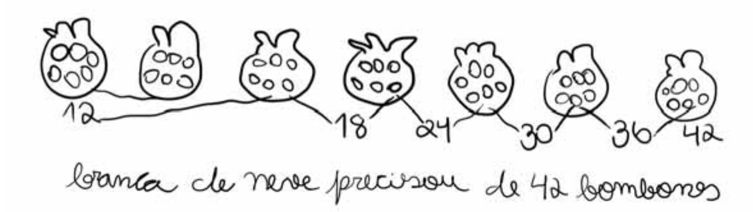
ESCUTE SEU ALUNO

O fato de não saberem usar o algoritmo da multiplicação e da divisão não deve ser um argumento para não propor, aos alunos, problemas que sugiram essas operações. Em geral, as crianças resolvem essas situações a partir de conhecimentos que constróem independentemente da escola, pois estão expostas a inúmeras situações que suscitam esses cálculos.

Primeira Escuta

Apresentamos abaixo a solução de Maria para um problema:

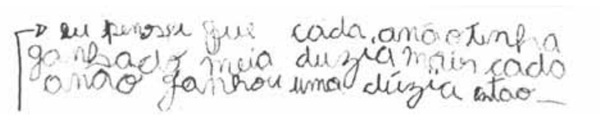
"Branca de Neve aproveitou a saída dos 7 anões para fazer uma surpresa: preparou saquinhos com uma dúzia de bombons para cada um. De quantos bombons ela precisou?"

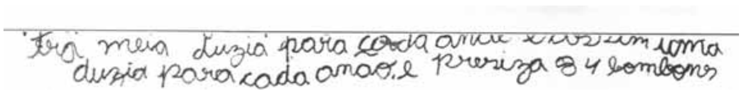


Vendo o trabalho de Maria, sua professora perguntou: *"Maria, quanto é uma dúzia?"*, apontando para o dado no enunciado. Imediatamente Maria disse: "Fiz tudo errado – eu fiz com 6 e é com 12 – vou ter que fazer de novo". Sua professora perguntou, então: *"tem certeza que você não pode aproveitar o que já fez?"*

A resposta de Maria foi surpreendente, e a reproduzimos abaixo. Usando as margens de seu trabalho, ela escreveu:

"Eu pensei que cada anão tinha ganhado meia dúzia 'mais' cada anão ganhou uma dúzia então outra meia dúzia para cada anão faz uma dúzia para cada anão e precisa de 84 bombons"



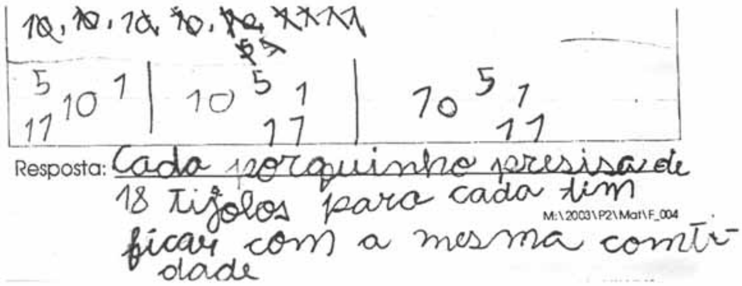


Observe que, no diálogo com sua professora, a frase *"vou ter que fazer de novo"* parece indicar que Maria iria refazer o problema com a mesma estratégia anterior, fazendo novos desenhos e uma nova contagem. No entanto, incentivada pela pergunta de sua professora, Maria mudou sua estratégia para uma bem mais econômica, utilizando um raciocínio lógico mais abstrato e oferecendo uma justificativa matematicamente correta.

Segunda Escuta

Observe como Vera resolve uma situação que sugere a operação de dividir, proposta no problema:

"Os três porquinhos, para se protegerem do Lobo Mau, decidiram construir um muro bem forte. Havia 54 tijolos. Com quantos tijolos cada porquinho deve ficar para construírem, juntos, este muro, de forma que nenhum dos três trabalhe mais que o outro?"



O registro de Vera indica o caminho de sua solução, apesar de não apresentar todas as etapas que a levaram à resposta correta. Foi necessário que a professora a escutasse diretamente para que pudesse compreender seu raciocínio.

• Vera decompôs, inicialmente, o **54** da seguinte forma: **10 –10 –10 –10 – 10 – 1 – 1 – 1 – 1.**

• A seguir distribuiu um "10" para cada porquinho, restando: **10 – 10 – 1 – 1 – 1 – 1.**

• Como já não era possível distribuir um "10" para cada porquinho, ela riscou mais um "10" e disse que deu "5" para dois dos porquinhos.

• A seguir, ela decompôs o último "10" em **5** e **5** e deu um destes "5" para o terceiro porquinho.

• Percebeu, então, que ainda restavam **9** tijolos decompostos em: **5 – 1 – 1 – 1 – 1.**

• Neste momento, ela passou a dar um tijolo para cada porquinho, contando de 1 em 1, até gastar os 9 tijolos restantes.

LEMBRE-SE

A multiplicação e a divisão devem ser trabalhadas concomitantemente, ressaltando-se que uma operação é o inverso da outra. Esse momento – de preparar a criança para a multiplicação e a divisão – é de fundamental importância. Todas as atividades aqui propostas devem ser realizadas de forma concreta, para que a criança, por meio destas experiências, possa realmente compreender as operações. É na orientação e discussão destas atividades concretas, realizadas em grupos ou coletivamente com toda a turma, que você poderá perceber como seus alunos estão compreendendo e internalizando os conceitos das operações. Isso vai aumentar a segurança e a confiança de seus alunos em seu próprio trabalho e facilitar o aprendizado da Matemática nos estágios seguintes.

ATIVIDADES PARA O PROFESSOR

1. Contando Casos: faça um pequeno relato sobre uma experiência com seus alunos, que esteja relacionada com os temas discutidos nesta aula.

2. Crie um exemplo de atividade, que possa ser desenvolvida com seus alunos, para cada tipo de ação associado à operação de multiplicação.

3. Crie um exemplo de atividade, que possa ser desenvolvida com seus alunos, para cada tipo de ação associado à operação de divisão.

4. Exemplifique várias maneiras diferentes de escrever 24 como produto de dois fatores. Associe uma figura a cada um destes produtos

5. Escreva 36 como produto de dois fatores de três maneiras diferentes.

6. Releia o primeiro caso da seção “Escute seu aluno” e escreva um pequeno parágrafo sobre a importância do papel da professora neste relato.

7. Releia o segundo caso da seção “Escute seu aluno”. Faça uma proposta de como a professora poderia ajudar Vera a melhorar o registro de sua solução.

AULA 10

PREPARAÇÃO PARA EFETUAR A MULTIPLICAÇÃO E A DIVISÃO

OBJETIVOS DESTA AULA

• Identificar a importância da apreensão dos fatos básicos da multiplicação e da divisão na preparação do aprendizado destas operações.

• Propor atividades de manipulação concreta para a compreensão das propriedades da multiplicação e da divisão.

TEXTO PARA LEITURA

Como já havíamos esclarecido quando abordamos o ensino da adição e da subtração, os fatos básicos, no presente caso da multiplicação e da divisão, devem ser estudados informalmente para que, após a primeira conceituação, possam ser registrados matematicamente e depois memorizados.

O estudo dos fatos básicos deve ser feito de várias formas. Destacamos a importância de se tomar um produto de cada vez, para que a criança possa redescobrir todas as combinações possíveis de parcelas iguais, o que também facilita correlacionar a multiplicação e a divisão como operações inversas. Por exemplo, com 12 palitos se estuda o produto 12, e a criança registra suas experiências, vendo que 2×6, 3×4, 4×3, 6×2 são 12, assim como $12 \div 2 = 6$, $12 \div 3 = 4$, $12 \div 4 = 3$, $12 \div 6 = 2$.

	2 x 6 = 12 12÷2 = 6
	3 x 4 = 12 12÷3 = 4
	4 x 3 = 12 12÷4 = 3
	6 x 2 = 12 12÷6 = 2

A memorização dos fatos básicos é necessária para que a criança multiplique com exatidão e rapidez. O que não se deve fazer é levá-la a estudar a tabuada, sem que ela tenha formado o conceito e sem que seja capaz de reconhecer situações multiplicativas. Além disso, esta memorização deve ser feita por meio de jogos e brincadeiras, o que a tornará natural e agradável.

A ordem de apresentação dos fatos básicos também é importante. Apresentamos, na tabela abaixo, uma sugestão de etapas a serem seguidas neste processo. É importante lembrar que as peculiaridades da turma e o ritmo de aprendizagem dos alunos podem diferir e devem ser respeitados.

Primeira Etapa	Segunda Etapa	Terceira Etapa
Produtos e dividendos até 16 (informalmente)	Produtos e dividendos até 36.	Produtos e dividendos até 81.

Na primeira etapa, os fatos básicos são utilizados para a conceituação, em um trabalho que, provavelmente, possibilitará que eles sejam melhor fixados. Note que nesta proposta de etapas da aprendizagem não agrupamos os fatos por multiplicador, ou seja, não sugerimos que se esgote a apresentação de tabuadas completas – primeiro de 2, depois de 3 e assim por diante – para depois passar à etapa seguinte. Nesta proposta, consideramos que você, na primeira etapa, pode explorar quaisquer dois fatores cujo produto seja menor ou igual a 16 e $16 = 2 \times 8 = 8 \times 2 = 4 \times 4$, por exemplo.

Posteriormente, com os conceitos já bastante vivenciados e compreendidos, os fatos das outras etapas vão sendo introduzidos em situações concretas, semelhantes às já utilizadas, reforçando assim os conceitos. A passagem da 2ª para a 3ª etapa deve ser feita quando todos os fatos da 2ª tiverem sido bem trabalhados e fixados.

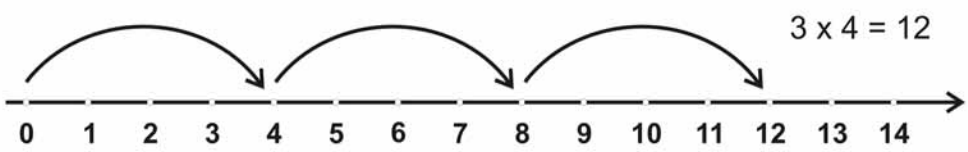
SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Nas sugestões abaixo, daremos destaque àquelas que não são usualmente encontradas em livros didáticos e que exploram o trabalho concreto.

Atividades que levam à memorização dos fatos básicos

Para a memorização dos fatos básicos, você pode fazer exercícios como estes:

1 – Descubra o fato da multiplicação representado na reta:

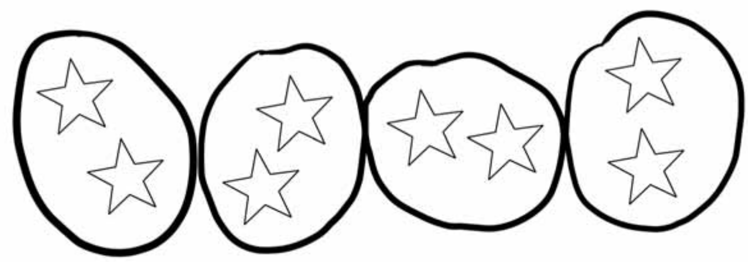


2 – Complete o quadro:

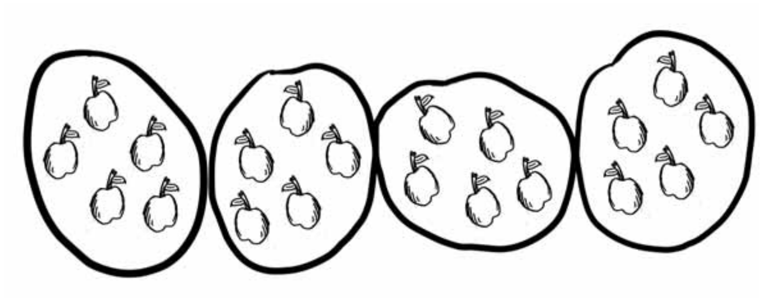
3×1	3×2	3×3	3×4	3×5	3×6	3×7	3×8	3×9
3	6	9	...	...	...	...	...	...

3 – Represente a sentença com desenho:

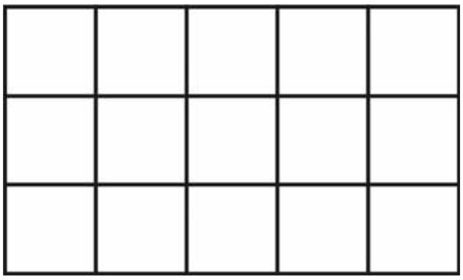
$4 \times 2 = 8$



$4 \times 5 = 20$



4 – Dê a resposta certa:



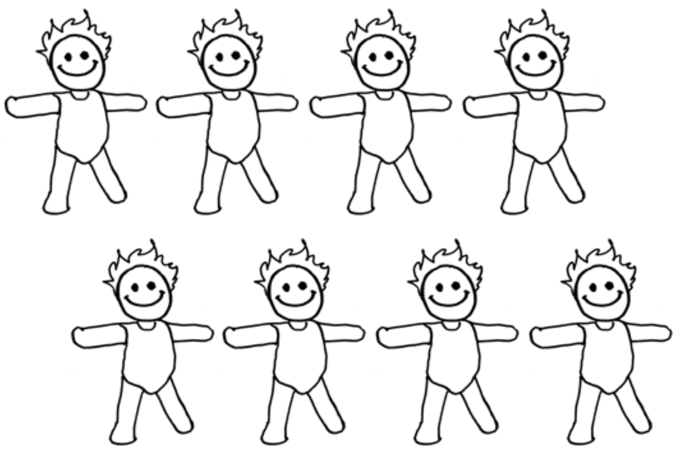
- Quantas filas de quadrinhos?.......

- Quantos quadrinhos há em cada fila?......

- Quantos quadrinhos há ao todo?

- Podemos escrever: $5 \times 3 = 15$

6 – Vamos colorir:



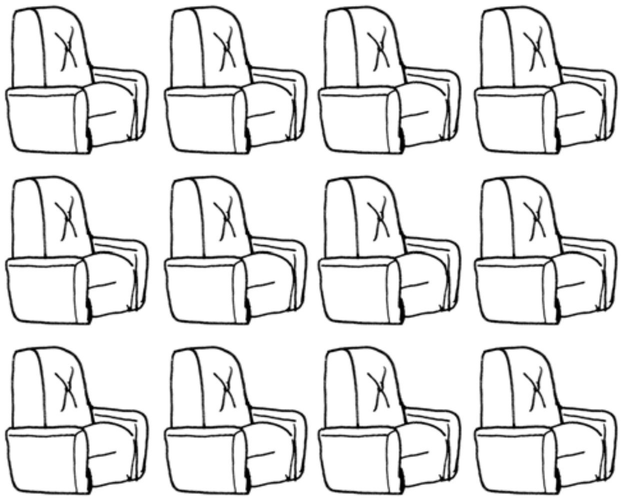
As bonequinhas podem ser louras ou morenas. Para as roupas podemos usar: vermelho, azul, verde ou lilás. Pinte os cabelos e os vestidos de modo que as bonequinhas fiquem diferentes entre si.

- Quantas bonequinhas diferentes você obteve? ......

Complete: $2 \times 4 =$ ....

7 – Vamos fabricar poltronas:

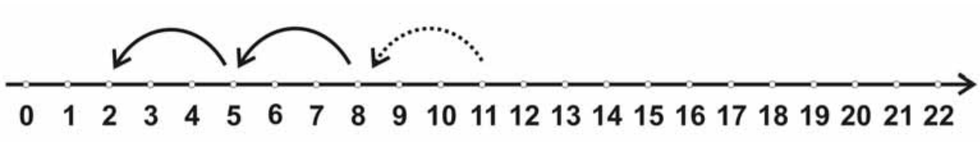
Nossa fábrica usa 3 tipos de tecidos: liso, estampado com flores e estampado com estrelas. Estes tecidos podem ser de 4 cores: azul, amarelo, vermelho ou verde. Faça todas as poltronas diferentes que você conseguir:



- *Quantas poltronas diferentes você obteve?*

Complete: $3 \times 4 = ...$

7 – Complete a tabela, com o auxílio da reta numérica:



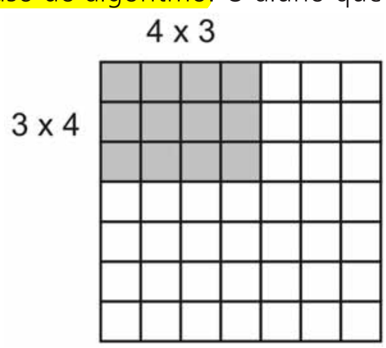
2	5	8	11				
3 x 0 + 2	3 x 1 + 2				3 x 5 + 2		

AS PROPRIEDADES DE MULTIPLICAÇÃO E DA DIVISÃO

O estudo de algumas propriedades da multiplicação e do princípio fundamental da divisão é muito importante. No entanto, tais propriedades devem ser trabalhadas concretamente, sem que haja preocupação de sintetizá-las ou mesmo de nomeá-las. O professor deve apenas dar oportunidade à criança de vivenciar os fatos enunciados por tais propriedades, de maneira que ela própria chegue às conclusões fundamentais. De modo geral, o conhecimento de uma propriedade facilita a própria conceituação da operação e a sua utilização aumenta a habilidade operatória.

Propriedades da multiplicação e suas aplicações

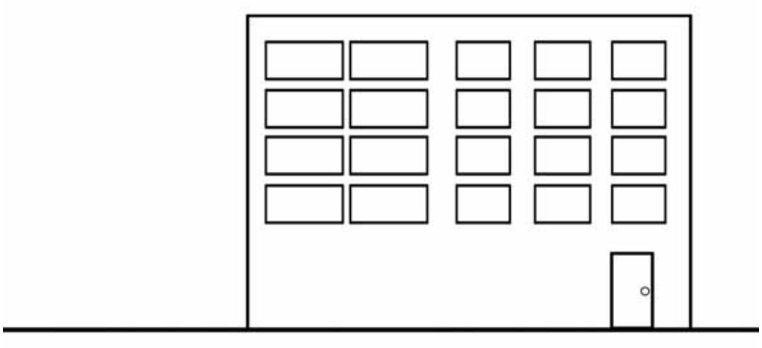
A compreensão da propriedade comutativa da multiplicação reduz o estudo dos fatos básicos à metade, além de facilitar o uso do algoritmo. O aluno que percebe que a multiplicação é comutativa, sabe que pode multiplicar 248 × 12 ao invés de 12 × 248, o que facilitará seu cálculo, reduzindo as chances de erro. Esta propriedade é facilmente observada utilizando papel quadriculado, como vemos ao lado.



Em representações como esta, é fácil observar que se considerarmos 4 colunas de 3 (4 × 3) ou 3 linhas de 4 (3 × 4), o resultado, ou númerode quadrinhos pintados,é o mesmo.

Outra propriedade importante da multiplicação é a distributiva em relação à adição, que permite a compreensão do algoritmo, evitando sua realização mecânica. Sua observação pode ser feita em situações-problema como as que vamos descrever a seguir.

"Observe o desenho do edifício



Temos 4 andares com 5 janelas cada.

Qual o total de janelas? ($4 \times 5 = 20$)

Observe que em cada andar temos 2 janelas grandes e 3 janelas pequenas.

Existe outra forma de encontrarmos quantas janelas tem o edifício?"

Os alunos devem concluir que podemos encontrar primeiro o total de janelas grandes e, em seguida, o de janelas pequenas e então somar os resultados. Matematicamente representamos:

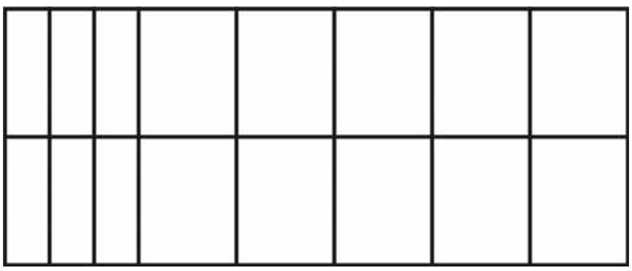
$4 \times 2 + 4 \times 3 = 8 + 12 = 20$

Observe que o resultado não se altera, porque estamos utilizando a propriedade distributiva, ou seja:

$$4 \times 5 = 4 \times (2 + 3) = 4 \times 2 + 4 \times 3 = 8 + 12 = 20$$

Esta atividade pode ser realizada envolvendo vários outros tipos de situações, como por exemplo:

a) um estacionamento com 2 filas, sendo que em cada uma delas há 3 vagas para motos e 5 para carros de passeio; precisamos determinar o número total de vagas.



$2 \times 8 = 16$ ou $2 \times 3 + 2 \times 5 = 6 + 10 = 16$

b) um pomar com 5 filas iguais, nas quais foram plantadas 3 macieiras e 4 laranjeiras; queremos o total de árvores plantadas.

$5 \times 7 = 35$ ou $5 \times 3 + 5 \times 4 = 15 + 20 = 35$

c) uma horta com 4 filas iguais, em que foram plantados 6 pés de alface e 3 pés de couve-flor.

$4 \times 9 = 4 \times 6 + 4 \times 3 = 24 + 12 = 36$

d) Como posso usar minha calculadora para efetuar 35×27, se a tecla 7 da não está funcionando?

Por exemplo: $35 \times 27 = 35 \times 21 + 35 \times 6 = 735 + 210 = 945$

Princípio fundamental da divisão

Denominamos Princípio Fundamental da Divisão a seguinte igualdade:

$$D = d \times q + r$$

onde:

D é o dividendo
d é o divisor,
q é o quociente e
r é o resto.

O professor, conhecendo bem este princípio, saberá que a criança só terá compreendido o conceito de divisão se reconhecer que:

- o quociente é sempre menor que o dividendo;
- numa divisão exata (resto igual a zero), o produto do quociente pelo divisor é igual ao dividendo;
- numa divisão inexata (resto diferente de zero), o resto é sempre menor que o divisor;
- se o resto não é zero, encontramos o dividendo multiplicando o quociente pelo divisor e somando o resto.

Essas relações vão sendo observadas durante todo o estudo da divisão, não sendo necessário que as crianças explicitem seus enunciados. Atividades envolvendo a ação de repartir, por exemplo, são excelentes para a observação da terceira relação: a criança deve ser levada a observar que, se a quantidade que lhe resta na mão ainda é maior do que o número de grupos pelos quais está distribuindo o material, ainda poderá colocar um objeto, pelo menos, em cada grupo, até que o resto seja menor que o divisor (número de grupos).

No entanto, à medida que os alunos vão amadurecendo e necessitando menos do apoio de materiais concretos, esta relação deve ser praticada em exercícios, nos quais os alunos percebam a importância de conhecer e compreender este resultado. Algumas sugestões:

1. Atividades envolvendo a calculadora.

Usando a calculadora, leve seus alunos a resolver diversas situações–problema, que envolvam o princípio fundamental da divisão. A calculadora é indicada nesta situação, pois nosso interesse aqui não é a aprendizagem de algoritmos, mas sim levar o aluno a decidir quais operações devem ser feitas e em qual ordem.

• *Pensei em um número, subtraí 4 e dividi por 5. O resultado obtido foi 7. Em que número pensei?*

Para resolver este exercício, o aluno deverá desfazer, por meio das operações inversas e na ordem contrária, as operações indicadas no problema.

Desta forma, ele primeiro encontra o valor $35 = 5 \times 7$, desfazendo a divisão. Em seguida, ele encontra o $39 = 35 + 4$, desfazendo a subtração.

• *Pensei em um número, quando dividi por 6, encontrei quociente 7 e resto 3. Em que número pensei?*

Neste exemplo, o aluno deve aplicar diretamente o Princípio Fundamental da Divisão. Para resolvê-lo, será necessário que ele tenha conceituado que $D = d \times q + r$. Os cálculos a serem realizados na calculadora são: $6 \times 7 = 42$; $42 + 3 = 45$

• Uma gráfica está organizando os livros que imprimiu em caixas para distribuição. Em cada caixa cabem 12 dúzias de livros. O funcionário já calculou que irá completar 248 caixas e ainda ficará com 88 livros sem embalar. Quantos livros foram impressos pela gráfica?

A calculadora permite também a exploração de situações–problema envolvendo valores numéricos maiores, sem que o aluno se perca do objetivo da resolução no meio de cálculos trabalhosos. Assim, para resolver o problema acima o aluno deve traçar um plano de trabalho:

- Calcular o valor de 12 dúzias (valor do divisor): $12 \times 12 = 144$.

- Calcular a quantidade de livros que será colocada nas caixas (valor do produto do divisor pelo quociente): $248 \times 144 = 35\,712$

- Calcular o número de livros impressos (adicionar o resto, encontrando o valor do dividendo): $35\,712 + 88 = 35\,800$.

Para além das fronteiras

O uso da calculadora permite ainda que os alunos sejam apresentados, informalmente, ao fato de que a divisão (exata) de números naturais pode ter como resultado um número decimal. Por exemplo, peça a seus alunos para efetuar na calculadora a divisão de 135 por 12. O resultado encontrado será 11.25.

Discuta com eles que este valor pode ser interpretado, por exemplo, como a divisão de R$ 135,00 por 12 pessoas, cada uma recebendo 11 reais e 25 centavos.

Insista com seus alunos que, embora a calculadora esteja correta, você deseja que eles encontrem o quociente (inteiro) e o resto da divisão de 135 por 12. Ajude seu aluno a pensar no problema perguntando se é possível, a partir do valor fornecido pela calculadora, encontrar o quociente e o resto da divisão. As crianças deverão perceber que a parte inteira do número decimal encontrado é o quociente procurado: 11.

Para recuperar o resto, os alunos deverão aplicar uma outra estratégia. Há duas possibilidades:

- Se multiplicarem $12 \times 11 = 132$ e subtraírem este resultado de 135, eles estarão aplicando o princípio fundamental da divisão para encontrar 3, o resto.

- Se multiplicarem na calculadora 0,25 por 12, encontrando 3, eles estarão, informalmente, iniciando a expansão de seu campo numérico e realizando uma multiplicação de números decimais (observe que as moedas de R$ 0,25 oferecem um suporte concreto para este tipo de cálculo, mesmo para crianças nas fases iniciais de construção da operação de divisão)

---

2. Atividades de manipulação aritmética dos valores envolvidos em uma divisão são desafios interessantes que ajudam a flexibilizar o raciocínio de seus alunos, levando-os a aplicar o princípio fundamental da divisão.

Por exemplo:

As perguntas seguintes referem-se a esta divisão:

$$\begin{array}{r|l} 35 & 8 \\ \cline{2-2} -32 & 4 \\ 3 & \end{array}$$

a) Se o dividendo aumentar 2 unidades o que acontecerá com o quociente e com o resto da divisão?

O aluno deverá perceber que mais duas unidades no dividendo aumentam o resto para 5. Como este resto ainda é menor do que 8, o quociente permanecerá igual a 4.

b) Se o dividendo aumentar 5 unidades o que acontecerá com o quociente e com o resto da divisão?

O aluno deverá perceber que mais cinco unidades no dividendo aumentariam o resto para 8. Como 8 é igual ao divisor, este resto estaria incorreto, pois seria possível formar mais um grupo de 8 elementos. Assim, o quociente aumenta para 5 e o novo resto é zero.

c) Se quisermos que o quociente aumente 2 unidades e o resto permaneça o mesmo, o que devemos fazer com o dividendo?

O aluno deverá perceber que aumentar duas unidades no quociente corresponde a aumentar $2 \times 8 = 16$ unidades do dividendo. Como o resto permanece o mesmo, o novo dividendo deve ser $35 + 16 = 51$.

d) Se quisermos que o resto seja zero e que o quociente aumente 3 unidades, o que devemos fazer com o dividendo?

Para que o resto passe a ser zero sem que o quociente seja modificado, é necessário subtrair 3 unidades do dividendo: $35 - 3 = 32$.

Para aumentar o quociente 3 unidades, é necessário acrescentar $3 \times 8 = 24$ unidades no dividendo. Ficamos então com o dividendo igual a $32 + 24 = 56$.

Uma outra estratégia possível para resolver este item é o aluno perceber que estamos pedindo-lhe para encontrar o valor de $8 \times (4 + 3) = 8 \times 7 = 56$.

e) Se quisermos que o resto seja o maior possível, o que devemos fazer com o dividendo?

O aluno deve perceber que o maior resto possível na divisão por 8 é igual a 7. Logo, será necessário somar 4 unidades ao dividendo.

f) Se quisermos que o quociente diminua 1 unidade e o resto também diminua 1 unidade, o que devemos fazer com o dividendo?

O aluno deve perceber que para diminuir uma unidade no resto, ele deve diminuir uma unidade no dividendo, ficando com 34.

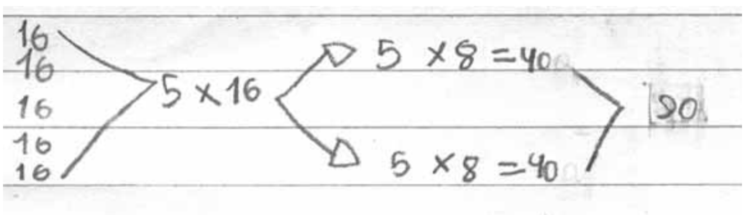
Para diminuir o quociente em uma unidade, ele deve diminuir 8 unidades no dividendo, ficando com 26.

ESCUTE SEU ALUNO

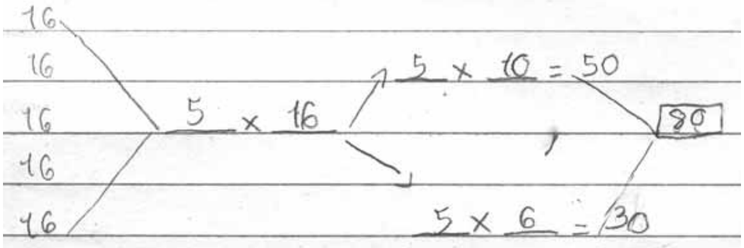
Primeira Escuta

Nos exercícios analisados abaixo, a professora passou como tarefa, fazer a multiplicação decompondo um dos números e obtendo resultados parciais, que deveriam ser adicionados ao final (aplicação da propriedade distributiva). Ela sugeriu (mas não obrigou) que seus alunos multiplicassem primeiro as dezenas e, a seguir, as unidades.

Observe alguns registros:

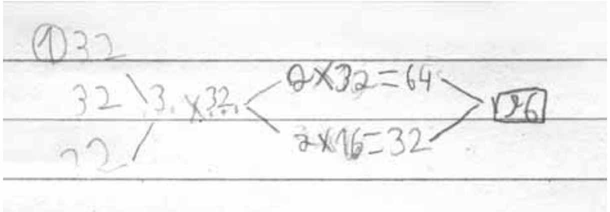


Victória chega ao resultado de 5×16 de uma maneira diferente da sugerida pela professora, e explica: *"Eu sei 'de cabeça' quanto é 5×8, mas não sei quanto é 5x6,* [resultado necessário para fazer a decomposição de 16 em 10+6] *e eu sei que 8 é a metade de 16. Então eu faço 2 vezes a conta 5×8, que é a mesma coisa que se fizesse 1 vez a conta 5×16."*



Clara, por outro lado, segue a sugestão da professora e decompõe o 16 em 10+6. Observe que a estratégia de Clara já é muito próxima do registro do algoritmo da multiplicação para os valores 16 e 5.

No entanto, sempre há surpresas quando permitimos aos nossos alunos liberdade de trabalho. Veja o registro de Roberta em uma tarefa similar, para o produto 3×32.



Contra todas as expectativas da professora, ao invés de decompor apenas o número de dois algarismos (32) e multiplicá-lo por 3, Roberta faz duas decomposições! Observe que, a partir de seu primeiro registro, Roberta parece perceber que pode fazer $2 \times 32 + 1 \times 32$ (decompondo o 3). Mas, a seguir, ao invés de apenas somar 32 ao resultado de $2 \times 32 = 64$, ela sente falta de registrar um outro produto e escreve $2 \times 16 = 32$. Uma possível explicação para isso é a fixação de que a estratégia de decomposição (uso da propriedade distributiva) envolve subdividir a multiplicação original em outras multiplicações, cujos resultados devem ser adicionados. Destacamos ainda, que para cumprir este "requisito", suposto pela aluna, ela recorre à idéia de dobro e metade, que é muito simples e facilmente automatizada pelas crianças deste nível de escolaridade. Observe que Victória também recorreu à idéia de dobro/metade em sua estratégia de cálculo.

Segunda Escuta

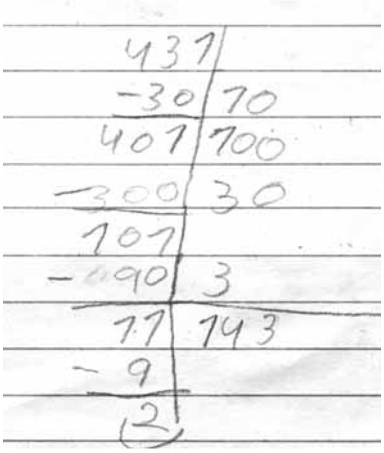
Buscando auxiliar as crianças a chegarem a uma primeira sistematização da divisão, a professora desta turma fez registros de divisões de quantidades grandes, no quadro de giz, em conjunto com toda a turma, pedindo que seus alunos dessem "palpites" sobre como poderiam realizar uma repartição de modo mais rápido do que distribuindo uma unidade de cada vez para cada grupo.

A seguir, a professora propõe o seguinte problema:

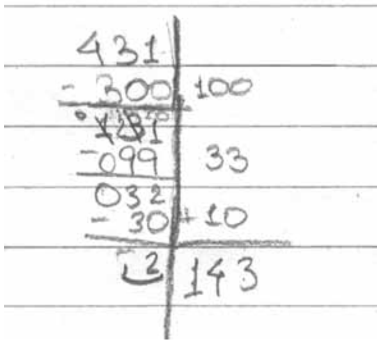
"Vamos arrumar 431 laranjas em 3 caixotes."

Veja o registro da solução de dois alunos:

Rodrigo



Lúcia



Note que a professora (por estratégia didática) usa um número grande de laranjas. Isto faz com que as crianças abram mão de distribuir as laranjas de uma em uma pelas 3 caixas. Assim, os alunos precisam buscar outra estratégia e distribuem quantidades maiores (e iguais entre si) de laranjas por cada uma das caixas, a cada "rodada" de distribuição.

Outro fato que chama atenção é que Rodrigo inicia sua arrumação colocando 10 laranjas em cada caixa. Apenas após verificar que isto ainda lhe deixava com uma quantidade muito grande de laranjas é que ele tenta um "passo mais largo", colocando 100 em cada caixa. Já Lúcia escolhe iniciar seu processo colocando 100 laranjas em cada uma das caixas, mostrando uma habilidade de fazer estimativa mais desenvolvida que a de Rodrigo. Ela percebe, desde o início, que cabem mais de 100 laranjas em cada caixa. Voltamos a enfatizar que a capacidade de estimar será de grande valia para aplicar o algoritmo da divisão.

Finalmente, é interessante observar as escolhas dos demais grupos de laranjas feitas pelas crianças. Rodrigo escolhe valores de forma a facilitar seus cálculos de multiplicar, subtrair e adicionar, não se importando com quantidade de parcelas em sua adição final. Por outro lado, Lúcia parece mais preocupada em fazer parcelas maiores (e, consequentemente, um menor número de parcelas). Escolher 33, parece evidenciar uma tentativa de esgotar quase que uma centena toda (99) de uma só vez. Veja, no entanto, que ela não usa nenhuma estratégia de cálculo mental para subtrair 99 (como subtrair 100 e adicionar 1, por exemplo) o que a obriga a aplicar o algoritmo, modificando dois agrupamentos.

LEMBRE-SE

É importante incentivar seus alunos a fazerem uso consciente das propriedades da multiplicação para que possam compreender as etapas do processo de cálculo pelo algoritmo formal. Reforçar as características do sistema decimal de numeração também é muito importante. Recorrendo a estas duas idéias, proponha que eles realizem, por exemplo, multiplicações decompondo um dos números e, a seguir, utilizem o cálculo mental.

A habilidade de realizar divisões e o uso compreensivo do algoritmo, como veremos na próxima aula, dependerá do reconhecimento das relações entre seus termos, que são usadas para conferir resultados e estratégias de cálculo, nesta fase de construção de conceitos.

Estimule seus alunos a fazerem estimativas de resultados de multiplicações e divisões. A capacidade de estimar será de grande valia na aplicação dos algoritmos, na avaliação da correção de resultados, na identificação dos erros e sua localização. Uma boa estratégia é pedir sempre aos alunos que "chutem" a ordem de grandeza do resultado que vão obter, antes de realizarem seus cálculos.

ATIVIDADES PARA O PROFESSOR

1. Contando Casos: faça um pequeno relato sobre uma experiência com seus alunos, que esteja relacionada com os temas discutidos nesta aula.

2. Elabore uma atividade que ajude seu aluno a perceber a propriedade comutativa da adição.

3. Elabore uma atividade que ajude seu aluno a perceber a propriedade associativa da adição.

4. Um professor estava trabalhando o cálculo mental com seus alunos, e perguntou qual era o resultado de 12 x 3. Alguns alunos tiveram muita dificuldade para encontrar o resultado, enquanto outros, não. Como você faria para calcular mentalmente 12 x 3? Explique.

5. Elabore uma atividade que ajude seu aluno a perceber que o quociente é sempre menor que o dividendo.

6. Elabore uma atividade que ajude seu aluno a perceber que numa divisão exata (resto igual a zero) o produto do quociente pelo divisor é igual ao dividendo.

7. Elabore uma atividade que ajude seu aluno a perceber que numa divisão inexata (resto diferente de zero) o resto é sempre menor que o divisor.

8. Elabore uma atividade que ajude seu aluno a perceber que se o resto não é zero, encontramos o dividendo multiplicando o quociente pelo divisor e somando o resto.

9. Elabore uma atividade que leve seus alunos a perceberem que, se N é um número qualquer, $0 \times N = N \times 0 = 0$.

AULA 11

O ALGORITMO DA MULTIPLICAÇÃO

OBJETIVOS DESTA AULA

- Identificar as etapas do algoritmo da multiplicação.
- Indicar procedimentos que tornem o aluno capaz de multiplicar corretamente.

TEXTO PARA LEITURA

Já sabemos que, para ensinar um algoritmo, a criança precisa entender o conceito da operação, os fatos básicos e o sistema de numeração. No algoritmo da multiplicação, além destes pré-requisitos citados, é de fundamental importância que as crianças tenham vivenciado e aprendido as propriedades desta operação assim como a da adição.

Mais uma vez, alertaremos para o fato de que não estamos fazendo uso do algoritmo quando pedimos aos alunos um "arme e efetue" em multiplicações como "5 x 3 =" ou "7 x 6 =". Estes resultados são fatos básicos da multiplicação. Dessa forma, a sua aplicação é parte dos conhecimentos que o aluno precisa ter adquirido para que possa utilizar o algoritmo confiantemente.

O algoritmo da multiplicação não é de fácil aprendizagem, por isso, deve ser trabalhado por etapas, até chegarmos à utilização de todas as técnicas na sua forma padronizada. Assim, você poderá ajudar seu aluno a desenvolver a habilidade de utilizar o algoritmo corretamente, o que vai exigir dele tempo e prática. Cuide para que seus alunos vivam diversas experiências, sempre envolvendo valores numéricos diferentes.

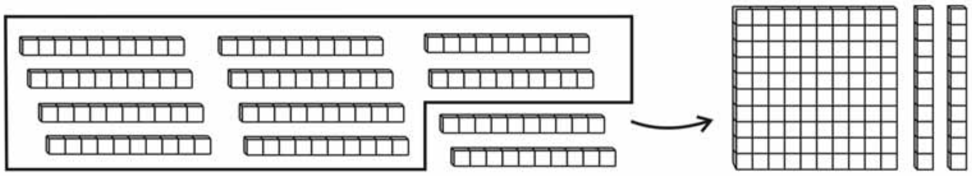
Repare também que, nesse estágio, nossas sugestões estarão menos baseadas na aplicação de materiais concretos. Espera-se que as crianças estejam amadurecendo e se tornando mais capazes de lidar com as representações numéricas, que precisam ter sido muito bem trabalhadas em todos os estágios anteriores. No entanto, lembramos que se algum aluno seu sentir necessidade de fazer explorações concretas, ele deve ter acesso ao material, o que não significa que todos os alunos devam acompanhá-lo, fazendo o mesmo.

SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Atividades que levam o aluno a multiplicar corretamente

A primeira etapa a ser desenvolvida para a aprendizagem do algoritmo da multiplicação é o cálculo do produto de dois números, de modo que: a) um dos fatores (multiplicador) seja formado por um número de um só algarismo e; b) o outro fator (o multiplicando) seja formado por um número que represente dezenas exatas.

Utilizando o material dourado, podemos introduzir esta operação por meio de materiais concretos. Com os alunos trabalhando em grupos, peça que eles arrumem sobre a mesa 3 grupos de 4 dezenas cada. Pergunte então o valor de 3 vezes 40.



Os alunos deverão fazer o agrupamento de 10 dezenas em uma centena, para obter a resposta correta: 120.

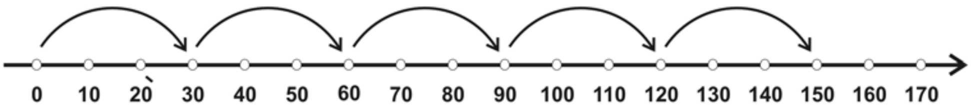
Repita esta experiência diversas vezes, utilizando diferentes materiais concretos e diferentes valores numéricos a cada vez.

Podemos também utilizar a contagem dos múltiplos de 10 em uma reta numérica, na qual são registradas apenas as dezenas.

Por exemplo:

Represente na reta numérica o produto abaixo:

$\boxed{5 \times 30}$



Pergunte ao aluno:

- *"Quantas dezenas há em 30?"* (3)

- *"Se dermos cinco pulos de três dezenas, teremos quantas dezenas?"* (15)

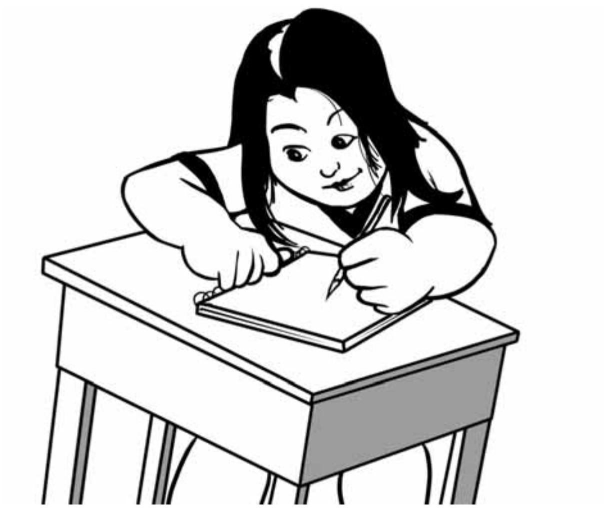
- *"Quantas unidades há em 15 dezenas?"* (150)

- *"Até que número pulamos?"* (150)

Registre:

$\boxed{5 \times 30 = 150}$

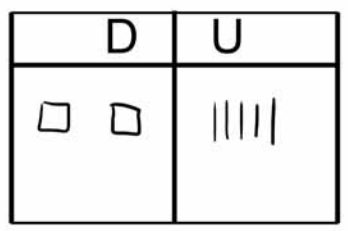
Peça que as crianças enunciem uma regra para multiplicar dezenas exatas por números de um algarismo. Os diversos enunciados e/ou a melhor regra negociada que for eleita pela turma, devidamente corrigidos pelo professor, podem ir para o Mural de Matemática da sala de aula.



Depois que as crianças tiverem dominado a habilidade de multiplicar números formados por um algarismo pelos que representam dezenas exatas, elas estarão prontas para aprender o algoritmo da multiplicação de um número de um algarismo por qualquer número de dois algarismos.

Por exemplo:

Vamos multiplicar 3 x 25.



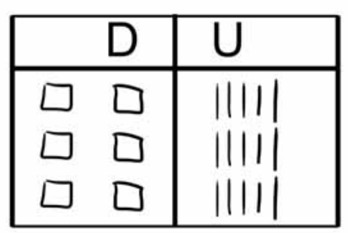
Num primeiro momento, peça às crianças que representem no QVL, com os palitos coloridos, o número 25.

Chamando a atenção para o quadro, discuta com elas como se poderia escrever e registrar essa representação em linguagem matemática:

$\boxed{20 + 5}$ (ou seja, outra maneira de escrever 25)

Num segundo momento, peça que elas representem no QVL a operação solicitada, ou seja:

$\boxed{3 \times 25}$ ou $\boxed{3 \times (20 + 5)}$



Observe com elas que temos três *vezes* duas dezenas *mais* três *vezes* cinco unidades.

Registre isso em linguagem matemática.

$\boxed{3 \times (20 + 5) = (3 \times 20) + (3 \times 5)}$ propriedade distributiva

• Repita e resolva as operações indicadas à esquerda da igualdade:

$3 \times 25 = 3 \times (20 + 5)$

$3 \times 25 = (3 \times 20) + (3 \times 5)$

$3 \times 25 = 60 + 15$

$3 \times 25 = 60 + 10 + 5$

$3 \times 25 = 70 + 5$

$3 \times 25 = 75$

Repita várias vezes este tipo de atividade usando o QVL e os palitos (ou outros materiais concretos), sempre com diferentes valores numéricos. Só depois de compreendidos todos os passos, realize o processo sem usar o material concreto. Por exemplo:

4 x 13 = 4 x (10 + 3)	1° passo
4 x 13 = (4 x 10) + (4 x 3)	2° passo
4 x 13 = 40 + 12	3° passo
4 x 13 = 40 + 10 + 2	4° passo
4 x 13 = 50 + 2	5° passo
4 x 13 = 52	6° passo

Analisando esse exemplo, vemos que os passos deste raciocínio são:

• No 1° passo, decompomos o número 13, ou seja, escrevemos 10+3 (procedimento que já foi trabalhado com os alunos em diversas oportunidades anteriores).

• No 2°, usamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

• No 3°, aplicamos duas habilidades da multiplicação já aprendidas: a multiplicação de um número de um só algarismo por dezenas exatas e a multiplicação de dois números de um só algarismo.

• No 4°, decompomos o número 12 em 10 + 2, para adicionar as dezenas exatas a seguir.

• No 5°, usamos a propriedade associativa da adição e adicionamos as dezenas.

• No 6°, adicionamos as dezenas e as unidades, obtendo o produto.

observação importante

Procure enfatizar a seguinte idéia: as dezenas obtidas após a multiplicação das unidades são adicionadas às outras dezenas só depois que estas também já foram multiplicadas pela unidade. Para isso, volte ao quinto passo e pergunte: *“Que fizemos com as dezenas obtidas, quando multiplicamos 4 × 13?”*

Aprendizagem do algoritmo propriamente dito

Quando a etapa descrita acima estiver bem compreendida, as crianças estarão prontas para aprender o algoritmo, que vai utilizar uma notação vertical nas qual os algarismos serão dispostos em colunas posicionais.

Dividiremos essa etapa em quatro estágios, como veremos a seguir.

1° estágio: Iniciando o processo

Vamos multiplicar 32 por 6, ou seja, 6 × 32.

Pergunte aos alunos:

$$\begin{array}{r} 30 + 2 \\ \times \quad 6 \\ \hline 180 + 12 \end{array} \rightarrow 192$$

- *“Que resultado obtivemos depois que multiplicamos 6 por (30+2)?”*

- *“Qual será a maneira mais conveniente de escrever 12 e 180 para adicioná-los?” (o aluno deve concluir que é utilizando o algoritmo da adição).*

Escreva no quadro-de-giz a mesma multiplicação 6 × 32 da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times \ 6 \\ \hline \end{array}$$

e a resolva com os alunos, fazendo as seguintes perguntas:

- *“Quando multiplicamos o 6 pelo 2, que produto obteremos?” (12)*

- *“Que representa o 3 do 32?”* (3 dezenas)

- *“Quando multiplicamos 6 por 3 dezenas, qual será o produto?”* (18 dezenas ou 180 unidades)

Comente com os alunos que a melhor maneira de adicionar já foi apresentada, e registre:

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times \ 6 \\ \hline 12 \\ 180 \\ \hline 192 \end{array}$$

Faça diversos exemplos com os alunos, sempre variando as quantidades envolvidas.

2° estágio: Efetuando a multiplicação por um número de um algarismo

Nesse estágio, a criança já deve ter fixado todo o desenvolvimento do processo e já deve efetuar mentalmente algumas operações.

Por exemplo:

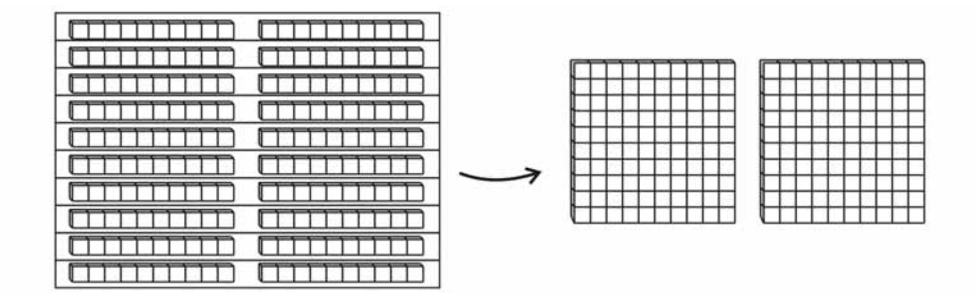
$$\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 6 \\ \hline 192 \end{array}$$

Efetue a operação com a criança, mostrando que ao multiplicarmos 6 por 2 escrevemos as duas unidades e guardamos mentalmente a dezena, que será adicionada às outras dezenas do produto. Tais dezenas, por sua vez, serão obtidas quando multiplicarmos as 3 dezenas por 6.

3° estágio: Efetuando a multiplicação de números de dois algarismos

Nesta etapa, veremos o algoritmo da multiplicação de dois números, cada um deles representado no SDN por dois algarismos. Neste momento, as crianças já devem ter construído uma base para aprender o algoritmo, que deve incluir um mínimo de novas técnicas.

Para dar início a este estágio, é importante levar a criança a trabalhar o produto de dezenas por dezenas. Inicie, por exemplo, considerando 10 grupos de 20 unidades cada. Peça que seus alunos representem estes grupos com materiais concretos e façam os agrupamentos necessários.



Registre o resultado:

$$\boxed{10 \times 20 = 200}$$

Peça que as crianças completem uma tabela como a representada abaixo. O professor pode disponibilizar material concreto, mas deve incentivar seus alunos a não utilizá-lo, tentando resolver mentalmente os cálculos. É importante sistematizar estes resultados, pois eles são a base para a compreensão dos produtos a serem realizados com números de mais de um algarismo.

10 x 30	10 x 50	10 x 80	20 x 20	20 x 40	30 x 40	40 x 60	50 x 80
(300)	(500)	(800)	(400)	(800)	(1 200)	(2 400)	(4 000)

Neste momento, o professor pode ajudar seu aluno a compreender propriedades e regras práticas importantes para a multiplicação e a utilizá-las com segurança. Por exemplo:

- **20 x 40 = (2 x 10) x (4 x 10) = (2 x 4) x (10 x 10) = 8 x 100 = 800**
- **40 x 60 = (4 x 10) x (6 x 10) = (4 x 6) x (10 x 10) = 24 x 100 = 2400**
- **50 x 80 = (5 x 10) x (8 x 10) = (5 x 8) x (10 x 10) = 40 x 100 = 4000**

Com os produtos de dezena por dezena trabalhados, a criança deverá estar pronta para trabalhar o algoritmo envolvendo números de dois algarismos. Por exemplo:

Vamos calcular o produto de 43 por 27. Iniciamos por fazer o produto 7 x 43.

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times\ 7 \\ \hline 301 \end{array}$$

• Faça essa etapa com as crianças, mostrando que estamos multiplicando sete unidades por 43, e que o processo é igual ao anterior.

Efetue, agora, o produto das duas dezenas. Adicione este produto ao produto das unidades. Dê muita ênfase ao valor do 2 no número 27, ou seja, insista no fato de que ele representa 2 dezenas; logo, nessa segunda multiplicação, estaremos multiplicando o 3 por duas dezenas e obteremos 6 dezenas, que devem ser colocadas na ordem das dezenas. Em seguida, mostre que ao multiplicarmos as duas dezenas por 4 dezenas acharemos 8 centenas, as quais devem ser colocadas na ordem das centenas.

Temos, assim, que:

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times\ \ 27 \\ \hline 301 \\ +\ 86\ \ \\ \hline 1161 \end{array}$$

O desenvolvimento deste algoritmo deve ser feito através de muitos e variados exercícios.

4º estágio Efetuando a multiplicação envolvendo números de mais de dois algarismos

O professor não deve ter pressa em iniciar este estágio. Quanto melhor as crianças estiverem trabalhando com multiplicação de números de dois dígitos, mais simples será o trabalho delas neste estágio. É importante observar que não estamos sugerindo que o professor inicie este estágio logo ao final do anterior. Ao contrário, o aluno deve vivenciar diversas outras aprendizagens, inclusive o início da aprendizagem do algoritmo da divisão, para posteriormente retomar a aprendizagem do algoritmo da multiplicação. O principal motivo para esta recomendação é que este estágio vai requerer dos alunos mais amadurecimento em Matemática, pois ficará muito difícil usar o apoio de materiais concretos, devido às quantidades envolvidas.

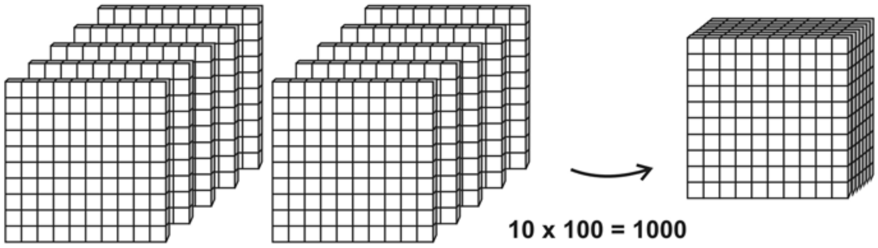
Como no terceiro estágio, peça que as crianças completem uma tabela como a representada abaixo.

10 x 500	20 x 200	20 x 400	30 x 400	40 x 600	50 x 800	100 x 700
(5 000)	(4 000)	(8 000)	(12 000)	(24 000)	(40 000)	(70 000)

Leve seus alunos a aplicar propriedades, a reconhecer e sistematizar resultados. Por exemplo:

• 40 x 600 = (4 x 10) x (6 x 100) = (4 x 6) x (10 x 100) = 24 x 1 000 = 24 000

Se necessário, utilize o material dourado para mostrar a seus alunos que:



Só após os alunos estarem confiantes em multiplicar dezenas exatas por centenas exatas e centenas exatas por centenas exatas é que o professor deve dar início ao processo do algoritmo. Neste estágio, diversos de seus alunos já farão inferências da aprendizagem do algoritmo do estágio 3, e o processo será facilitado. Vamos calcular o produto de 438 por 23. Iniciamos por fazer o produto 3 x 438.

• Faça essa etapa com as crianças, mostrando que estamos multiplicando três unidades por 438, e que o processo é similar ao anteriormente aprendido.

$$\begin{array}{r} 438 \\ \times \quad 3 \\ \hline 1314 \end{array}$$

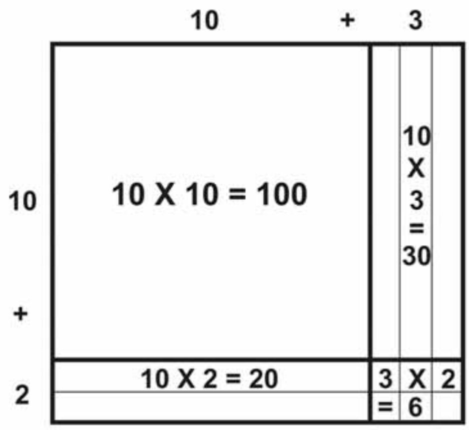
$$\begin{array}{r} 438 \\ \times \; 23 \\ \hline 1314 \\ + \; 876 \\ \hline 10074 \end{array}$$

Efetue, agora, o produto das duas dezenas que será adicionado ao produto das unidades. Dê muita ênfase ao valor do 2 no número 23, ou seja, insista que ele representa 2 dezenas; logo, nessa segunda multiplicação, estaremos multiplicando o 8 por 2 dezenas e obteremos 16 dezenas, que devem ser registradas da seguinte forma: o algarismo 6 é colocado na ordem das dezenas e as dez dezenas (ou uma centena) são registradas na memória (ou por escrito). Em seguida, mostre que ao multiplicarmos as 2 dezenas por 3 dezenas acharemos 6 centenas, as quais as devem ser adicionadas à centena anterior, obtendo um total de 7 centenas, que serão registradas na ordem das centenas. Finalmente, multiplicamos as 2 dezenas pelas 4 centenas e obtemos 8 unidades de milhar, que devem ser registradas na ordem correspondente. Para concluir, adicionando os resultados parciais, temos que 438 x 23 = 10 074.

Observe ainda que, como no estágio 3, o desenvolvimento deste algoritmo deve ser feito através de muitos e variados exercícios.

Para além das fronteiras

A íntima relação entre o processo de multiplicação e o cálculo da medida de áreas de retângulos usando como unidade o quadrado de lado unitário pode fornecer um modelo concreto para a multiplicação que aproxima a geometria da aritmética, ajudando seu aluno a perceber a Matemática como um todo, e não como partes sem conexão.



Assim, por exemplo, para calcular a área de um retângulo de lados 12 e 13, podemos observar que o processo de cálculo desenvolvido pelo algoritmo corresponde a uma forma de calcular a

$$
\begin{array}{r}
1\ 3 \\
\times 1\ 2 \\
\hline
20 + 6 \\
100 + 30 \\
\hline
100 + 50 + 6 \rightarrow 156
\end{array}
$$

área de um retângulo dividindo-a de forma integrada com o SDN:

ESCUTE SEU ALUNO

Como dissemos nesta aula, a aquisição do algoritmo da multiplicação pelas crianças é um processo longo. Mesmo aquelas que já o utilizam com uma certa destreza, muitas vezes, dão sinais de dificuldade em compreender o significado da técnica que estão aplicando, e serão necessárias diversas reelaborações por parte dos alunos durante o processo.

Para uma turma que dava claros sinais de ter dominado a técnica do algoritmo para os casos mais simples, foi proposto o cálculo de 41 x 25. A seguir, foi pedido que as crianças respondessem algumas perguntas sobre o processo que estavam realizando. Nesta seção, vamos analisar as respostas de crianças que utilizaram o algoritmo corretamente, em um padrão similar ao de Bruna (ver ao lado):

$$
\begin{array}{lr}
 & 41 \\
 & \times 25 \\
\hline
\text{(1ª linha)} & 205 \\
\text{(2ª linha)} + & 820 \\
\hline
 & 1.025
\end{array}
$$

Primeira Escuta

Para a pergunta:

"O número que aparece na primeira linha é resultado de que parte da multiplicação?"

Encontramos respostas como:

Bruna:

Da unidade.

Eduarda:

. O número que aparece na 1ª linha, e o primeiro resultado.

Fernanda:

. Da 1ª. 5x1 e 5x4

Luiza:

. É o resultado de 5x41, ou seja, o segundo algarismo do número debaixo vezes o número de cima.

Bruna oferece uma resposta bastante incompleta: ela diz que uma das parcelas é a "unidade", sem especificar se está se referindo ao algarismo na ordem das unidades em 41 ou em 25. Ela também não menciona qual a outra parcela da multiplicação. Eduarda deixa claro (na terminologia utilizada em sua sala de aula) saber que se trata do "primeiro resultado", ou seja, do cálculo de 5 x 41. Fernanda sabe as parcelas envolvidas, mas parece não ter percebido que ao multiplicar 5 x 4 está, na verdade, multiplicando 5 x 40. Finalmente, Luiza explicita, corretamente, que a primeira linha é o resultado de 5 x 41.

Segunda Escuta

Para a pergunta:

"Quanto vale o 8 que aparece na 2ª linha?"

As respostas oferecidas por estas mesmas meninas foram:

Bruna:

O 8 que aparese na 2 linha vale 80.

Fernanda e Luiza: 800.

Eduarda:

O 8, na 2ª linha significa o 800, porque se na conta de dezena x dezana, é claro que o resultado vai dar como centena, e tambem porque na 2ª linha tem que dei-xar o espaço da unidade vazio.

Observe que Bruna, embora complete a segunda linha com o zero – escrevendo 820 (ver os cálculos no início da seção), nos diz que o valor posicional do 8 é 80. Esta é uma resposta bastante comum no momento em que a criança começa a utilizar corretamente a técnica. Muito embora ela escreva o zero, ela obteve como resultados de multiplicações apenas o 8 e o 2 – ou seja – 82 (em geral, o zero é acrescentado ao final, sem se saber o porquê, como se fosse apenas para compor o número).

Tanto Fernanda quanto Luiza escreveram 820 na "2ª linha" de seus cálculos e demonstram – de forma sucinta – que reconhecem o valor posicional do 8. Já Eduarda – a única das meninas que não completou a "2ª linha" com o zero – parece ter tomado esta decisão de forma consciente, pois é capaz de afirmar, com segurança, que o valor posicional do 8 é 800.

Na verdade, Eduarda faz uma generalização bastante útil, a partir de suas próprias observações sobre o resultados de multiplicações – ela afirma que *"na conta de dezena* x *dezena, é claro que o resultado vai dar como centenas".* Embora, *"é claro que"* não seja um argumento que explique a generalização feita por Eduarda, ela está absolutamente correta e sua formulação não tem erros lógicos (ver exercício 6).

LEMBRE-SE

Procure trabalhar a construção do algoritmo apresentando operações motivadas pela resolução de algum problema. Isto ajuda os alunos a perceberem as inúmeras aplicações desta nova técnica operatória e torna o processo muito mais agradável do que as grandes e repetitivas listas de “arme e efetue”.

A memorização dos fatos básicos (que deve acontecer de forma natural e gradativa), a capacidade de aplicar as propriedades e a compreensão do Sistema Decimal de Numeração (refletida nas ações de grupar e desagrupar) são outros fatores decisivos para o aprendizado do algoritmo da multiplicação.

O professor deve liderar este processo de aquisição do algoritmo: isso não significa que ele deva “impor” o algoritmo às crianças que nem começaram a compreendê-lo, mas também não faz sentido esperar que elas descubram por si mesmas a forma mais econômica de trabalhar a multiplicação. A história da Matemática nos dá provas de que esse é um processo longo, e cabe o professor encontrar atalhos que não prejudiquem a compreensão matemática de seus alunos, mas que ajudem na aquisição de uma técnica que, de outra forma, poderia não ser adquirida pela criança.

Os termos da multiplicação têm nomes específicos:

$$\begin{array}{r l}
3 & \longrightarrow \text{multiplicando} \\
\times\ 8 & \longrightarrow \text{multiplicador} \\
\hline
24 & \longrightarrow \text{produto}
\end{array}
\quad \left.\begin{array}{l} \text{multiplicando} \\ \text{multiplicador} \end{array}\right\} \text{fatores}$$

Na interpretação da multiplicação como adição de parcelas iguais, o multiplicando indica o valor de cada parcela; o multiplicador, a quantidade de parcelas; e o produto, o resultado final.

ATIVIDADES PARA O PROFESSOR

1. Contando Casos: faça um pequeno relato sobre uma experiência com seus alunos, que esteja relacionada com os temas discutidos nesta aula.

2. Nesta aula, sugerimos que os alunos não registrem as dezenas obtidas pelo produto das unidades, mas que memorizem temporariamente este resultado. Você concorda com esta estratégia ou prefere que seus alunos registrem este valor por escrito? Escreva um pequeno parágrafo justificando sua opinião.

3. Relate duas atividades que você costuma aplicar em sala de aula para ajudar seus alunos a compreenderem e utilizarem corretamente o algoritmo da multiplicação. Para cada uma delas, descreva os objetivos que você pretende alcançar.

4. Neste capítulo, demos destaque ao produto de dezenas exatas por números de um algarismo, por considerar que esta é uma etapa fundamental na aprendizagem do algoritmo, na qual se baseia a compreensão do processo. Você destacaria algum outro resultado em suas aulas? Qual? Justifique sua resposta.

5. Baseando-se na interpretação da operação de multiplicação como adição de parcelas iguais, explique porque devemos escrever 3 x 25, mas preparar o algoritmo na forma:

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array}$$

6. Na seção *"Escute seu aluno"*, Eduarda desafiou nossos conhecimentos.

(a) Formule corretamente a generalização feita (ou seja, diga o que acontece quando multiplicarmos dezenas exatas por dezenas exatas).

(b) Ofereça uma justificativa para a sua afirmativa em (a).

(c) Explique porque afirmamos que a formulação proposta por Eduarda não tem erro lógico.

AULA 12

O ALGORITMO DA DIVISÃO: INICIANDO O PROCESSO DE APRENDIZAGEM

OBJETIVOS DESTA AULA

• Identificar procedimentos que tornem melhor a compreensão da estrutura do algoritmo da divisão.

• Indicar procedimentos que levem o aluno a dividir corretamente.

• Apresentar o algoritmo da divisão pelo processo das subtrações sucessivas, discutindo suas possibilidades didáticas.

• Identificar as etapas iniciais do ensino do algoritmo da divisão pelo processo longo.

TEXTO PARA LEITURA

O algoritmo da divisão é, sem dúvida, o mais difícil e o mais complexo dentre os algoritmos das quatro operações, pois envolve, além do sistema de numeração, dos fatos básicos e do conceito de operação, a utilização das outras operações (adição, subtração e multiplicação) e a propriedade distributiva da divisão em relação à adição.

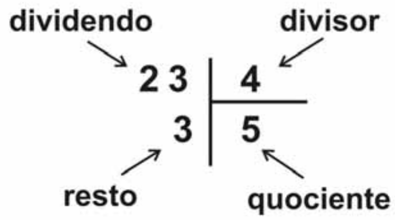
O processo das subtrações sucessivas é uma opção para se chegar ao algoritmo da divisão. Ele tem como ponto de partida a relação paralela que existe entre a subtração e a divisão. Embora seja um processo que os alunos compreendam com mais facilidade, ele não é muito usado nas nossas escolas, sendo mesmo desconhecido por alguns professores.

Achamos por bem iniciar o estudo do algoritmo da divisão através deste método, para enriquecer e ampliar seu conhecimento sobre o assunto, e para dar conta de casos nos quais os alunos têm dificuldades na compreensão e utilização dos demais algoritmos da divisão (processos longo e abreviado). Assim, se trabalharmos bem todas as etapas do processo das subtrações sucessivas, de modo que a criança compreenda cada uma delas, ela acabará conseguindo efetuar estas etapas de memória, abreviando o processo de resolução do algoritmo da divisão. Além disso, é possível estabelecer relações entre este algoritmo e o algoritmo longo da divisão, o que significa que ele pode contribuir positivamente para uma compreensão dos demais processos operatórios da divisão.

Daremos continuidade ao nosso estudo utilizando material de contagem representado no QVL no caso do cálculo da divisão pelo processo longo.

Os alunos devem trabalhar bastante com materiais concretos antes da utilização do algoritmo, pois isso lhes dará uma melhor compreensão e uma maior segurança no desenvolvimento de todas as etapas do algoritmo .

Finalmente, lembramos que os termos da divisão têm nomes específicos, que utilizaremos nas sugestões de atividades a seguir.



SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Procedimentos que contribuem para que o aluno venha a dividir corretamente

Antes de iniciarmos o algoritmo da divisão, vamos rever os valores que atribuímos aos palitos coloridos em aulas anteriores. Lembre-se que você pode combinar com seus alunos outros valores ou usar outros materiais dentre os já apresentados neste curso. Uma boa sugestão para substituir os palitos são os canudos industrializados para bebidas, que já podem ser comprados em diversas cores.

1 palito natural vale 1 unidade

1 palito vermelho vale 10 palitos naturais; ou seja, 1 dezena; logo, 10 unidades.

1 palito azul vale 10 vermelhos ou 100 naturais; ou seja, 1 centena, que vale 10 dezenas ou 100 unidades.

Depois de recordar os valores atribuídos aos palitos, trabalhe com as crianças as seguintes atividades:

• Distribua para cada grupo de quatro alunos uma certa quantidade de palitos coloridos.

• Peça às crianças que, usando alguns palitos, representem o número 16 (um vermelho e seis naturais).

• Em seguida, peça que as crianças dividam igualmente esses palitos entre eles (os quatro de cada grupo).

O professor deve deixar que seus alunos cheguem à conclusão de que devem trocar o palito vermelho por 10 naturais. Assim, cada aluno receberá 4 palitos naturais.

Repita esta atividade, com diversas quantidades de palitos e de alunos no grupo. Inicialmente dê preferência às divisões exatas. Depois que os alunos já estiverem efetuando bem as trocas, passe a utilizar divisões que deixam resto.

Atividades que levam à compreensão da estrutura do algoritmo da divisão por subtrações sucessivas

Vamos iniciar nosso estudo desta forma de calcular, efetuando a divisão de 18 por 3. Inicialmente, apresente o algoritmo e converse sobre como os valores serão organizados, pois ele difere bastante dos demais algoritmos.

$$
\begin{array}{r|l}
18 & 3 \\ \cline{2-2}
\end{array}
$$

Paralelamente, dê 18 objetos para os alunos e peça que formem grupos de três elementos. Peça que tirem um grupinho de três elementos de cada vez, e pergunte.

- *"Quantas vezes você tirou grupos de três elementos?"* (6)

Vamos ver o que acontece no algoritmo.

Numa primeira apresentação do algoritmo pelo processo das subtrações sucessivas, registre com seus alunos cada uma das vezes que retiraram um conjunto de 3 elementos, fazendo perguntas que relacionem a ação sobre os objetos e o registro.

- *"Como descobriremos quantos objetos você retirou, se você retirou uma vez 1 conjunto?"* (multiplicando 1 por 3).

- *"Quantos objetos você tirou?"* (3).

- *"Que devo fazer para saber com quantos objetos você ficou?"* (subtrair 3 de 18).

- *"Posso continuar tirando grupos de três, agora que tenho 15 objetos?"* (sim)

$$
\begin{array}{r|l}
18 & 3 \\ \cline{2-2}
-\ 3 & 1 \\ \hline
15 & \\
-\ 3 & 1 \\ \hline
12 & \\
-\ 3 & 1 \\ \hline
9 & \\
-\ 3 & 1 \\ \hline
6 & \\
-\ 3 & 1 \\ \hline
3 & \\
-\ 3 & 1 \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

Observação

Repita as perguntas até se esgotarem todas as possibilidades de se retirar grupos de três, observe as quantidades restantes e faça o registro no algoritmo depois de cada pergunta; não o apresente pronto como está acima.

- *"Agora que você não pode mais tirar nenhum grupo de 3 responda: quantas vezes você tirou um conjunto de três?"* (6)

- *"Que operação você fez para achar essa quantidade?"* (adição)

Depois de entendido o processo, pergunte:

- *"Será que é necessário tirar apenas um grupo de três de cada vez?"*

Vamos agora considerar o conjunto de 18 objetos outra vez e formar alguns conjuntos de 3 e retirar.

- *"Quantos grupos de 3 você formou?"*

Vamos fazer de conta que foram quatro.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 3 \\ \cline{2-2} & 4 \end{array}$$

Registre:

- *"Quantas vezes você tirou grupos de 3 elementos?"* (quatro)

- *"Que operação você deve fazer para saber quantos objetos tem que retirar?"* (multiplicar 4 por 3)

$$\begin{array}{r|l} 18 & 3 \\ \cline{2-2} -\ 12 & 4 \\ \hline 6 & \end{array}$$

- *"Que operação você tem que fazer para saber quantos objetos sobraram?"* (subtrair 12 de 18)

- *"Quantos objetos você tem agora?"* (seis)

- *"Com essa quantidade você ainda pode formar conjunto de 3?"* (posso)

- *"Quantos?"* (dois)

- *"Então, quantas vezes mais você vai retirar um conjunto de 3?"* (duas)

- *"Que operação você deve fazer para saber quantos objetos foram retirados?"* (2 x 3)

- *"Que operação você deve fazer para saber quantos objetos sobraram?"* (6–6)

$$\begin{array}{r|l} 18 & 3 \\ \cline{2-2} -\ 12 & 4 \\ \hline 6 & \\ 6 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

- *"Quantos objetos você tem agora?"* (nenhum)

- *"É possível fazer novos grupos de 3?"* (não)

- *"Que operação você deve fazer para calcular o número total de vezes em que você retirou grupos de 3, de 18?"* (4 + 2)

18	3
– 12	4
6	
6	2
0	6 → número de conjuntos de 3 objetos cada

Só depois que as crianças estiverem familiarizadas com a técnica do algoritmo, que se baseia em subtrações repetidas e utiliza fatos básicos já conhecidos, é que estarão prontas a aprender situações mais complexas da divisão, como por exemplo, uma divisão como a de 86 por 5.

86	5

Escreva no quadro-de-giz:

Pergunte:

- *"Alguém sabe quantos grupos de 5 temos no número 86?"* (vamos supor que tenham dito 8)

- *"Vamos ver se está correta a resposta. Quantos grupos de 5 você formou?"* (8)

- *"Que operação você deve fazer para saber quantos objetos você tem que retirar?"* (multiplicar 8 por 5)

86	5
– 40	8
46	

- *"Que operação você tem que fazer para saber quantos objetos sobraram?"* (subtrair 40 de 86)

- *"Quantos objetos você tem agora?"* (46)

- *"Com essa quantidade, você ainda pode formar grupos de 5?"* (posso)

- *"Quantos?"* (vamos supor que tenham dito 7)

- *"Quantas vezes você retirou agora um conjunto de 5?"* (7)

- *"Que operação você deve fazer para saber quantos objetos sobraram?"* (subtrair 35 de 46)

$$\begin{array}{r|l} 86 & \underline{\;5\;} \\ -\ 40 & 8 \\ \hline 46 & \\ -\ 35 & 7 \\ \hline 11 & \end{array}$$

- *"Quantos objetos você tem agora?"* (11)

- *"Ainda é possível fazer grupos de 5?"* (sim)

- *"Quantos?"* (a essa altura a criança deve perceber que, com 11, só é possível fazer 2 grupos de 5)

- *"Quantas vezes você retirou agora um conjunto de 5?"* (duas)

- *"Que operação você deve fazer agora para saber quantos objetos sobraram?"* (subtrair 10 de 11)

$$\begin{array}{r|l} 86 & \underline{\;5\;} \\ -\ 40 & 8 \\ \hline 46 & \\ -\ 35 & 7 \\ \hline 11 & \\ -\ 10 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

- *"Não podemos continuar. Que operação você deve fazer para calcular o número total de vezes em que você retirou grupos de 5, de 86?"* (adicionar 8, 7 e 2)

$$\begin{array}{r|r} 86 & \underline{\;5\;} \\ -\ 40 & 8 \\ \hline 46 & \\ -\ 35 & 7 \\ \hline 11 & \\ -\ 10 & 2 \\ \hline 1 & 17 \end{array}$$

Há certas atividades que podem ser realizadas para que as crianças possam efetuar com mais eficiência e rapidez o algoritmo da divisão. Uma delas é usar a relação entre a multiplicação por múltiplos de 10 e a divisão por múltiplos de 10; outra é procurar o maior múltiplo do divisor que se pode subtrair do resto.

Veja este exemplo: se o cálculo a ser feito for a divisão de 435 por 17, leve o aluno a observar que ele vai resolver mais rapidamente a divisão se usar 20 grupos de uma só vez – ele obterá 340 que, subtraídos de 435, reduzirá para

95 o resto, que ainda pode ser agrupado em coleções de 17. Se ele procurar um número que, multiplicado por 17, der o seu maior múltiplo, menor que 95, ficará mais fácil ainda.

$M_{17} = \{0, 17, 34, 51, 68, 85, 102...\}$

Logo, o múltiplo de 17 menor que 95 é 85, e o número que multiplicamos por 17 para achá-lo foi 5; assim:

$$
\begin{array}{r|l}
435 & 17 \\ \cline{2-2}
-\ 340 & 20 \\ \hline
95 & \\
-\ 85 & \ \ 5 \\ \hline
10 & 25
\end{array}
$$

Pelo processo da subtração sucessiva, também fica fácil analisar que o resto nunca pode ser igual ou maior que o divisor, pois, caso contrário, ainda poderia fazer mais uma subtração. A criança pode e deve chegar, ela mesma, a essa conclusão.

Atividades que levam à compreensão da estrutura do algoritmo da divisão pelo processo longo

No processo das divisões sucessivas, exploramos a decomposição do dividendo em diversas parcelas, que são adicionadas ao final do processo. Mas, como exemplificado, há várias formas diferentes de decompor aditivamente o mesmo número – e todas levam ao mesmo resultado final. Nos algoritmos da divisão pelo processo longo e abreviado, ao invés de explorar qualquer decomposição dos valores envolvidos, vamos usar sempre a decomposição sugerida pelo sistema decimal de numeração. Assim, voltaremos a nos preocupar com agrupamentos de unidades em dezenas, de dezenas em centenas, etc. É sempre importante iniciar um estudo deste tipo utilizando materiais concretos. Nossa primeira sugestão é voltar a utilizar palitos coloridos. Relembrando:

1 palito natural vale 1 unidade

1 palito vermelho vale 10 palitos naturais; ou seja, 1 dezena; logo, 10 unidades.

1 palito azul vale 10 vermelhos ou 100 naturais; ou seja, 1 centena, que vale 10 dezenas ou 100 unidades.

Observação

Para facilitar nossa representação, pois não dispomos de cores, daqui por diante usaremos:

para representar as unidades |

para representar as dezenas □

para representar as centenas ▯

---

logo:

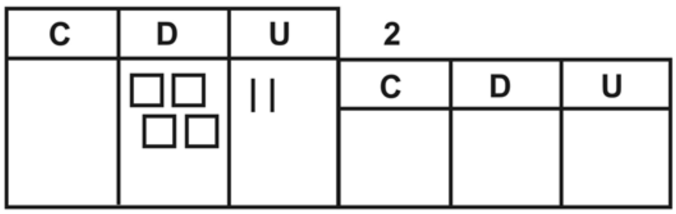
um □ vale |||||||||| (dez pauzinhos)
um ▯ vale □□□□□□□□□□ (dez quadradinhos)

Comecemos agora o estudo do algoritmo, com o divisor de um algarismo.

• Escreva, no quadro, o algoritmo para dividir 42 por 2 e comente que, no exemplo, o quatro vale "40 unidades" ou "4 dezenas"; e o 2 representa "2 unidades"..

$$42 \;\big|\underline{\;2\;}$$

• Peça aos alunos que representem com os palitos o valor do dividendo (42) no quadro abaixo:



• Pergunte aos alunos:

- *"Quantos quadrados (palitos vermelhos) há na coluna das dezenas?"* (quatro)

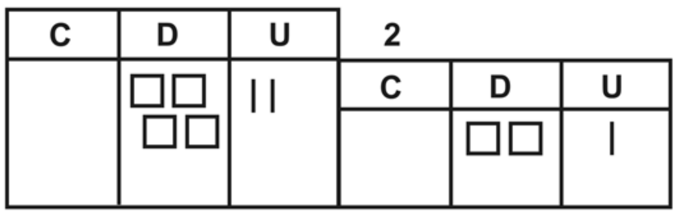
- *"Quantos pauzinhos (palitos) há na coluna das unidades?"* (dois)

• Peça para completarem:

- *"Quatro quadradinhos divididos por dois é igual a ..."* (dois)

- *"Dois pauzinhos divididos por dois é igual a..."* (um)

• Peça aos alunos que completem o quadro, utilizando os resultados:



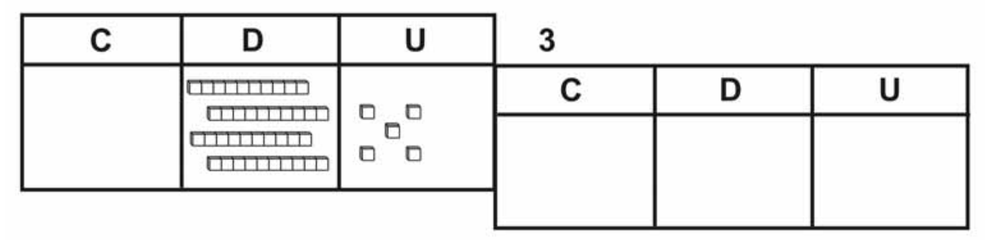
• Repita essa atividade variando as quantidades envolvidas no cálculo. Utilize números de tal forma que cada algarismo do número a ser dividido (dividendo) seja múltiplo do divisor.

• Proponha, em um segundo momento, divisões nas quais seja necessário fazer transformações:

Por exemplo:

$\boxed{45 \div 3}$

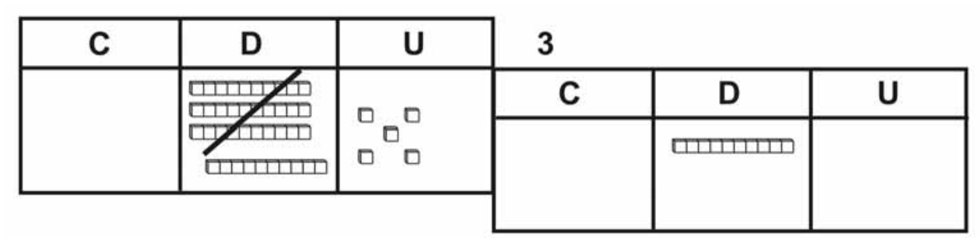
• Peça que representem o dividendo no QVL. A seguir mostramos como ficaria a operação se usássemos o material dourado:



• Pergunte aos alunos:

- *"As quatro barras podem ser divididas por 3?"* (sim)

- *"O que acontece?"* (conseguimos distribuir 1 barra – 1 dezena – para cada pessoa, mas ainda sobra uma barra inteira)

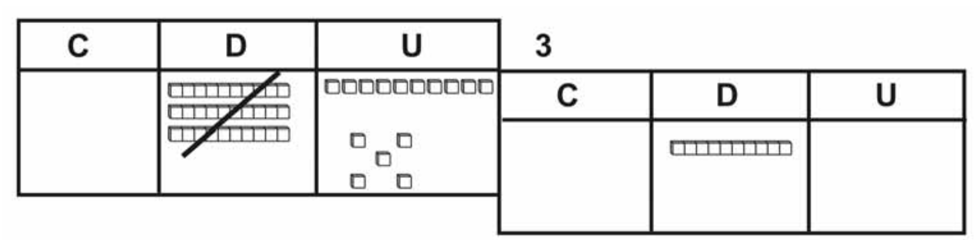


- *"E esta barra que sobrou, pode ser dividida por 3?"*

A esta altura, alguns alunos podem já ter consciência de que uma dezena é igual a 10 unidades responderão que ainda é possível continuar e dividir esta barra por 3. Outros, observando apenas o material concreto, uma barra, dirão que não. De qualquer modo é preciso que os alunos percebam que, concretamente, um dos objetos usados para representar as 4 dezenas, ou seja, 1 dezena, precisa ser desagrupado. Assim, continue com as seguintes perguntas:

- *"O que temos de fazer com a barra?"* (trocar por 10 unidades)

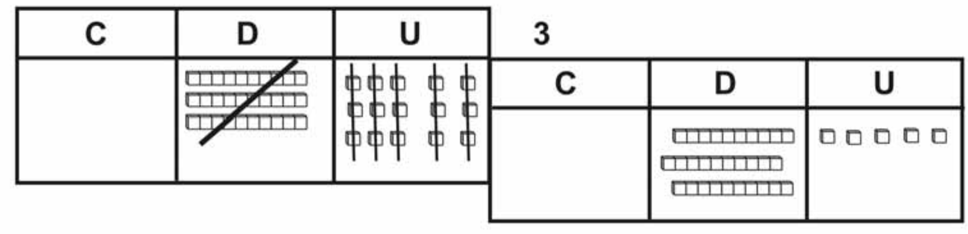
- *"Quantas unidades temos agora?"* (15)



- *"Quinze unidades podem ser divididas por 3?"* (sim)

- *"Organizem as unidades de 3 em 3. Quantos grupos de 3 podemos formar?"* (5)

- *"Então, 15 unidades divididas por 3 é igual a..."* (5)

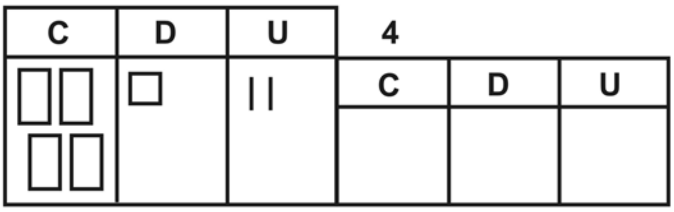


Continue trabalhando concretamente com exemplos nos quais apareçam as diferentes dificuldades da divisão.

Por exemplo:

$\boxed{\mathbf{412 \div 4}}$

- Peça aos alunos que representem o dividendo no quadro, como vemos abaixo:

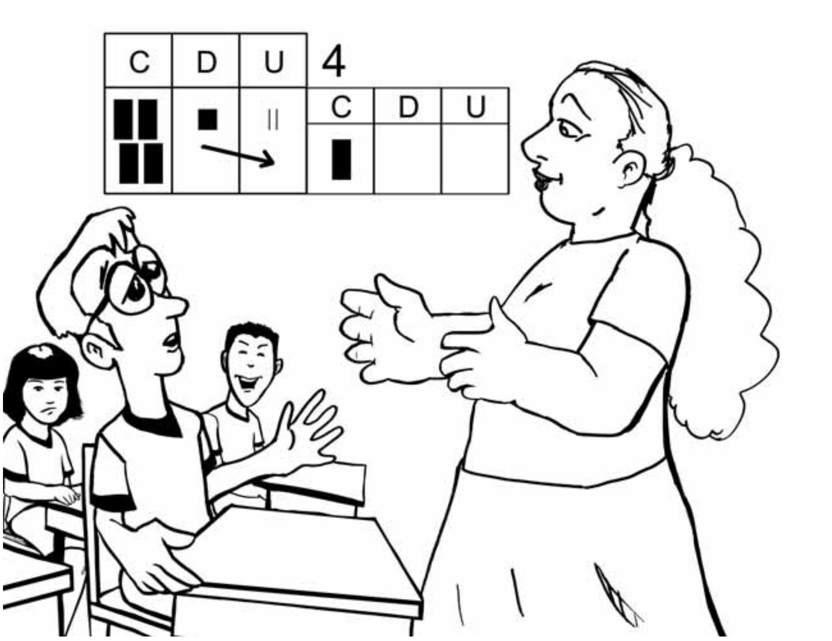


- *"Quatro retângulos (palitos azuis) dá para dividir por 4?"* (sim)

- *"Quatro retângulos divididos por 4 é igual a..."* (1)

- *"E uma dezena (palito vermelho) dá para dividir por 4?"* (não)

- *"O que temos que fazer com ela?"* (trocar por 10 pauzinhos)



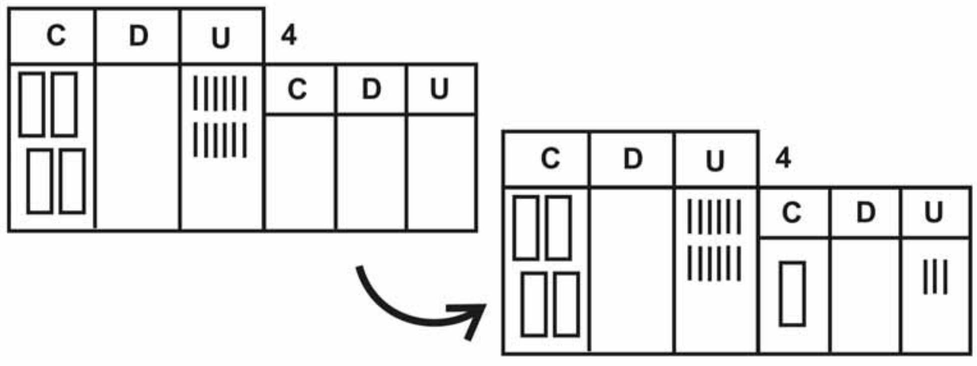
Em permanente diálogo, professor e alunos raciocinam juntos.

- "Como ficará a casa das dezenas à direita do algoritmo?" (vazia)

- "Quantos pauzinhos temos agora?" (12)

- "Doze pauzinhos divididos por 4 é igual a..." (3)

• Peça aos alunos que representem o dividendo no quadro, com os palitos:



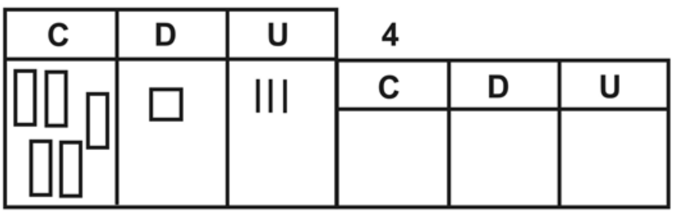
• Represente numericamente o resultado da divisão:

412 ÷ 4 = 103

Vejamos mais um exemplo, com outro tipo de dificuldade:

513 ÷ 3 =

• Peça que os alunos representem esta divisão, como no quadro abaixo:



Então, você pode perguntar ou pedir que completem:

- *"Cinco retângulos dá para dividir por 3?"* (sim)

-*"Cinco retângulos divididos por 3 é igual a..."* (1) *"e sobram..."* (2).

- *"Que devo fazer com esses dois retângulos que sobraram?"* (transformá-los em quadradinhos).

- *"Quantos quadradinhos tenho agora?"* (21)

- *"Vinte e um quadradinhos dá para dividir por 3?"* (sim)

- *"Vinte e um quadradinhos divididos por 3 é igual a..."* (7)

- *"Três pauzinhos eu posso dividir por 3?"* (sim)

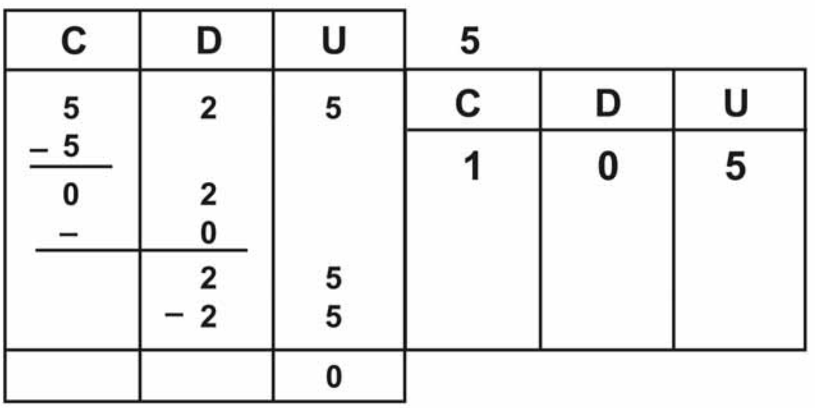
- *"Três pauzinhos divididos por 3 é igual a..."* (1)

• Repita várias vezes esse tipo de atividade com outras quantidades.

Depois que todo o processo tiver sido aprendido, você pode começar a operar numericamente, com os alunos. Por exemplo:

Pergunte aos alunos (ou peça que eles anotem em seus cadernos) quais foram as etapas do processo utilizado, orientando-os com as seguintes perguntas:

$\boxed{525 \div 5}$



- *"Cinco centenas podem ser divididas por cinco?"* (sim)

- *"Cinco centenas divididas por 5 é igual a..."* (1)

- *"Que operação devo fazer para saber quantas centenas usamos?"* (multiplicar 1 por 5)

- *"Que operação devo fazer para saber quantas unidades sobraram?"* (subtrair o resultado da multiplicação de 1 por 5 das centenas dadas).

Agora, abaixemos as 2 dezenas.

- *"Duas dezenas podem ser dividida por cinco?"* (não)

- *"Que devo fazer com elas?"* (transformá-las em unidades)

- *"Que número devemos colocar na casa das dezenas à direita do algoritmo?"* (zero)

O professor não antecipa respostas. O aluno é estimulado a pensar.

O professor não antecipa respostas. O aluno é estimulado a pensar.

Baixar o 5.

- *"Quantas unidades tenho agora?"* (25)

- *"Vinte e cinco unidades podem ser divididas por cinco?"* (sim)

- *"Vinte e cinco unidades divididas por 5 é igual a...* (5 unidades)".

- *"Que operação devo fazer para saber quantas unidades usamos?"* (multiplicar 5 por 5)

- *"E para saber se sobraram unidades?"* (subtrair o resultado de 5 x 5 das unidades)

Vejamos mais um exemplo, agora envolvendo resto nas divisões:

$\boxed{\mathbf{542 \div 3 =}}$

Você, então, pode perguntar aos alunos:

- *"Cinco centenas podem ser divididas por 3?"* (sim)

- *"Cinco centenas divididas por 3 é igual a..."* (1) *"e restam..."* (2)

- *"Que operação devo fazer agora para saber quantas centenas usamos?"* (multiplicar 1 por 3)

- *"E para saber quantas sobraram?"* (subtrair3 das centenas dadas).

- *"O que faço com as centenas que sobraram?"* (transformo em dezenas; 2 centenas = 20 dezenas)

Agora, podemos baixar as dezenas dadas.

- *"Quantas dezenas tenho agora?"* (24)

<table>
<tr><td>C</td><td>D</td><td>U</td><td colspan="3">3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5
– 3
2
– 2</td><td rowspan="2">4

4
4
0
–</td><td rowspan="2">2

2
0</td><td>C</td><td>D</td><td>U</td></tr>
<tr><td>1</td><td>8</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>2</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

- *"Vinte e quatro dezenas podem ser divididas por 3?"* (sim)

- *"Vinte e quatro dezenas divididas por 3 é igual a* (8 dezenas) *e não sobram dezenas.*

- *"Que operação devo fazer para saber quantas dezenas usamos?"* (multiplicar 8 por 3)

- *“E para saber quantas dezenas sobraram?”* (subtrair 24 das dezenas existentes)

- *“Sobrou alguma dezena?”* (não)

Agora, vamos baixar as unidades.

- *“Duas unidades podem ser divididas por 3?”* (não)

- *“Então o que devo fazer?”* (devemos completar a casa das unidades com zero, pois zero multiplicado por 3 dá zero, e esta foi a quantidade de unidades que usamos)

- *“Que operação devemos fazer para saber quantas unidades sobraram?”* (subtrair 0 das unidades dadas)

Assim:

513 ÷ 3 = 180 e restam 2

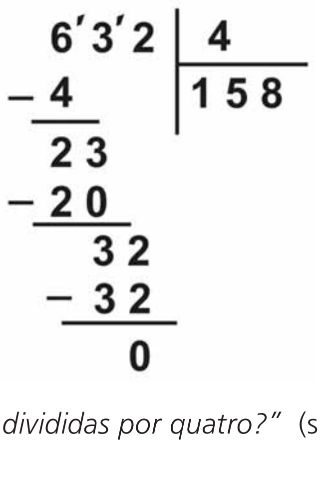
O QVL deve ser usado até que os alunos tenham compreendido bem a técnica operatória. Alguns professores estimulam seus alunos a passarem do registro no QVL diretamente para o processo abreviado; no entanto, muitos alunos ainda precisam ou ainda preferem fazer divisões pelo processo longo. No próximo capítulo, vamos discutir o porquê com mais detalhes. Mesmo trabalhando o algoritmo sem o QVL, devemos sempre chamar a atenção dos alunos para o valor relativo dos algarismos dos números envolvidos na operação, fazendo as mesmas perguntas que fizemos até agora. Mais uma vez, lembre-se que vale a pena sempre solicitar aos alunos que façam estimativas dos resultados que irão encontrar.

Assim, na divisão de 632 por 4, registrada a seguir, antes de iniciar o algoritmo pergunte a seus alunos:

- *“Vocês acham que cada um dos 4 vai ganhar mais ou menos de 100?”* (mais)

- *“Será que cada um ganhará mais de 200?”* (não) *“Por quê?”* (para cada um ganhar mais de 200, precisaríamos dividir uma quantidade maior do que 800)

Veja o registro do algoritmo desta divisão, pelo processo longo, sem o uso do QVL:



- *“Seis centenas podem ser divididas por quatro?”* (sim)

- *"Seis divididos por 4 dá..."* (1) , logo:

1 x 4 = 4

6 – 4 = 2

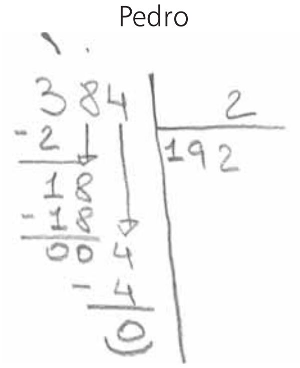
- *"Temos agora 23 dezenas. E 23 dezenas divididas por 4 é igual a..."* (5 dezenas)

E assim por diante...

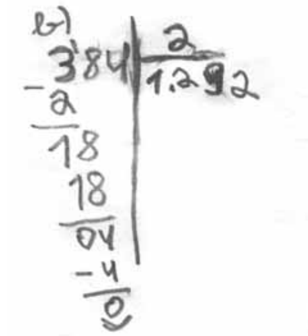
ESCUTE SEU ALUNO

Apresentamos o trabalho de três crianças, que efetuaram cálculos pela divisão longa.

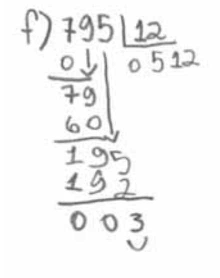
Pedro



Daniel



Júlia



Os trabalhos de Pedro e Daniel foram colocados lado a lado para efeito de comparação. Observe que as etapas desenvolvidas pelos dois são rigorosamente iguais e, no entanto, os quocientes encontrados são diferentes. Pedro encontra a resposta correta, enquanto Daniel obtém, no quociente, um número de 4 algarismos, dos quais três são plenamente justificados por seu trabalho (1; 9 e 2). Apesar do erro de Daniel ser muito comum, dificilmente o professor poderá compreendê-lo, se não perguntar à criança como ela desenvolveu o processo. Ao ser questionado por sua professora, Daniel respondeu que o algarismo "2" aparece logo depois do 1 porque 1 x 2 = 2. Ou seja, Daniel não apenas anotou o quociente da divisão de 3 centenas por 2, como também o produto que ele deveria subtrair das três centenas.

Observe, no entanto, que o erro de Daniel não é sistemático, ocorre apenas uma vez (ele não escreve como quociente 1 2 9 18 2 4, o que ocorreria se ele repetisse sua estratégia em todas as etapas da divisão). Além disso, este erro poderia ser facilmente detectado pelo próprio aluno, caso tivesse desenvolvido o hábito de fazer estimativas e verificar seus resultados.

Júlia está realizando uma divisão por um número de dois algarismos. Repare que ela inicia sua conta pelas centenas e conclui pela impossibilidade de dividir 7 por 12 (anota zero no quociente). Em seguida, ao dividir 79 por 12, ela encontra 5 como resposta e resto 19! Sem perceber seu erro (resto maior do que o divisor), Júlia prossegue a conta. Assim, fica com 195 para dividir por 12 (observe que 192 > 120 = 10 x 12). Ela, então, escreve 12 no quociente e faz a subtração 195 – 192 (mas, 12 x 12 = 144).

Analisando o trabalho de Júlia, vemos que ela não percebeu que encontrar o resto maior que o divisor significa que o quociente foi subestimado (79 ÷ 12 = 6, resto 7). E não prestar atenção a este fato, fez com que ela não conseguisse terminar o processo. Júlia parece perceber que a divisão de 195 por 12 vai dar um número de 2 algarismos, e embora este número não seja o “12” escrito por ela no quociente, ela o coloca após o “5” (5 dezenas) que já havia registrado. Reflita mais sobre o trabalho de Júlia nos exercícios!

Estes exemplos demonstram que nossos alunos precisam de tempo e de muitas oportunidades para reelaborar sua compreensão sobre o algoritmo da divisão. Com certeza, mesmo apoiados em uma base sólida como a do S.D.N. e sendo capazes de multiplicar e subtrair com uma certa destreza, o “passo” para dominar o algoritmo da divisão não é pequeno.

LEMBRE-SE

Deve ter ficado claro para você que o algoritmo da divisão realmente é o mais difícil dentre aqueles que já utilizamos. Para usá-lo competentemente, precisamos dominar não apenas os conceitos e fatos básicos, mas é necessário fazer estimativas, subtrair e multiplicar com facilidade. Dê tempo ao seu aluno para construir este algoritmo, apoie este aprendizado em material concreto e vá aumentando a dificuldade dos cálculos gradualmente. Relembre ao seu aluno de verificar em todas as etapas da divisão pelo processo longo se o resto parcial encontrado é menor que o divisor.

É sempre importante lembrar que, na divisão:

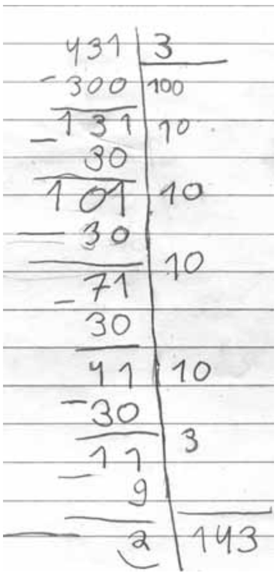
dividendo = divisor x quociente + resto

ATIVIDADES PARA O PROFESSOR

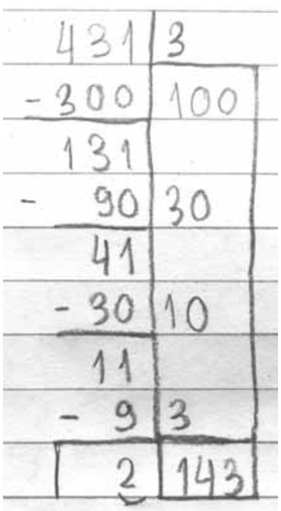
1. Contando Casos: faça um pequeno relato sobre uma experiência realizada com seus alunos, que esteja relacionada com os temas discutidos nesta aula.

2. Abaixo apresentamos a mesma divisão feita por Lúcia, Caio e Lucas por intermédio algoritmo das subtrações sucessivas. Escreva um pequeno parágrafo comentando as diferenças de estratégias nas retiradas. Comente também erros cometidos, e decida se estes são ou não relacionados com a compreensão do processo do algoritmo.

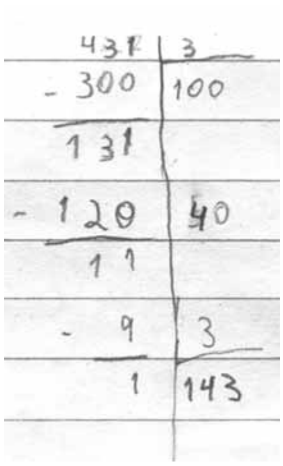
Lúcia



Caio



Lucas



3. A professora de Ana, ao conferir os cálculos feitos por ela na divisão de 325 por 33 ficou impressionada, pois o quociente encontrado por Ana estava obviamente errado, mas o resto estava absolutamente correto. Observe os cálculos de Ana e tente oferecer uma explicação para seu erro.

326	33
− 99	333
227	
− 99	
128	
− 99	
29	

4. Elabore uma atividade para convencer Ana que ela está muito próxima de um processo de divisão correto.

5. Retornemos à conta feita por Júlia no "Escute seu aluno" desta aula.

(a) Faça você a divisão de 795 por 12 e anote o quociente e o resto.

(b) A solução de Júlia, apesar de alguns erros, é uma solução possível. Pense sobre ela e continue a conta de Júlia a partir do ponto indicado abaixo, mas utilize o apoio do QVL para registrar seu resultado nas ordens corretas do quociente.

c d u	12
795	c d u
− 0	0 5
79	
− 60	
195	

(c) Compare os resultados dos itens (a) e (b). O que você pode observar?

(d) Você é capaz de explicar sua resposta no item (c)?

6. Observe que Júlia registrou o "zero" no seu quociente. No entanto, sabemos que um "zero à esquerda" não altera o valor do número.

(a) Explique por que Júlia registrou este zero.

(b) Você acha que o registro deste zero ajuda ou atrapalha a compreensão do algoritmo? Justifique sua resposta.

(c) Se um aluno seu registrasse este zero na ordem das centenas, com Júlia, como você agiria?

7. Escolha duas divisões feitas por seus alunos, que contenham erros, e faça uma análise do processo desenvolvido por cada um deles (faça-lhes perguntas, escute e anote suas explicações e justificativas).

8. Baseando-se no modelo dos exemplos apresentados nesta aula, crie e descreva uma atividade introdutória para a divisão por um número de dois algarismos pelo processo longo.

9. Explique, com suas palavras, a importância de saber fazer estimativas quando estamos aplicando o algoritmo da divisão.

10. Dê sugestões de como estimular seus alunos a fazer estimativas na divisão, de forma a ajudá-los a reconhecer a importância desta prática, tornando-a um hábito.

AULA 13

AMPLIANDO HORIZONTES: CONHECENDO MAIS SOBRE O ALGORITMO DA DIVISÃO

OBJETIVOS DESTA AULA

• Ampliar os conhecimentos sobre os processos longo e abreviado do algoritmo da divisão.

• Identificar as etapas do processo ensino–aprendizagem do algoritmo abreviado da divisão.

• Indicar procedimentos de subtração que levem o aluno a ter condições de dividir corretamente pelo processo abreviado.

TEXTO PARA LEITURA

Nesta aula, vamos estudar a divisão pelo processo longo com números com mais de um algarismo. Vamos reforçar a necessidade de levar seus alunos a fazer boas estimativas e dar algumas sugestões que você pode adotar para que ele melhore esta habilidade.

O outro tema de estudo desta aula é o algoritmo da divisão pelo processo *abreviado*, que é considerado como o de maior eficiência e rapidez de trabalho. Na aula anterior, sobre o aprendizado do algoritmo da divisão, procuramos sugerir que você não começasse a ensinar por este método; na verdade, da mesma forma que o algoritmo das subtrações sucessivas pode ser considerado como um estágio inicial para a aprendizagem do processo longo, este serve como etapa para o aprendizado do processo breve.

Mas a experiência mostra que não é verdade que todo aluno que realize com facilidade o processo longo da divisão esteja preparado para compreender e usar com sucesso o algoritmo abreviado. Nesta aula, vamos discutir com mais detalhes a principal diferença entre estes dois processos, buscando entender que a destreza em cálculo mental, exigida para se utilizar o processo abreviado, deve ser trabalhada com os alunos, pois esta não é desenvolvida apenas pelo bom conhecimento do algoritmo da subtração ou por meio da habilidade de calcular mentalmente ou fazer estimativas.

SUGESTÕES DE ATIVIDADES

As sugestões de atividades desta aula vão ser apresentadas em uma gradação de complexidade, procurando discutir as diversas etapas necessárias para a compreensão e uso dos algoritmos da divisão.

Atividades que levam o aluno a utilizar corretamente o algoritmo abreviado na divisão por números de um algarismo

O processo abreviado tem a mesma estrutura e as mesmas operações do processo longo. A única diferença é que todas as operações são feitas mentalmente.

Normalmente, o professor começa a ensinar o algoritmo da divisão pelo processo longo e vai eliminando os registros das operações. Vamos iniciar este estudo com uma divisão bem simples, e colocando os dois registros lado a lado.

Por exemplo: .

42 ÷ 2

• Registre no quadro, pergunte ou então peça que os alunos completem:

- *"Quatro dezenas divididas por 2 é igual a ..."* (2 dezenas)

- *"Que operação devo fazer para saber quantas dezenas usamos?"* (2 x 2)

- *"Que operação devo fazer para saber se sobrou alguma dezena?"* (subtrair o resultado de 2 x 2, das dezenas dadas)

- *"Sobrou alguma?"* (não)

$$\begin{array}{r|l} 4'2 & 2 \\ \cline{2-2} -4 & 2 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4'2 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$

Agora, vamos baixar as duas unidades para trabalharmos com elas.

- *"Duas unidades divididas por 2 é igual a ..."* (uma unidade)

- *"Sobrou alguma?"* (não)

- *"Que operação devo fazer para saber quantas unidades usamos?"* (multiplicar 1 por 2)

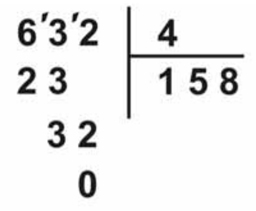
- "Que operação devo fazer para saber se sobraram unidades?" (subtrair o resultado de 1 x 2, das dezenas dadas).

$$\begin{array}{r|l} 4'2' & 2 \\ \cline{2-2} -4 & 21 \\ \cline{1-1} 0\,2 & \\ -2 & \\ \cline{1-1} \underline{0} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4'2' & 2 \\ \cline{2-2} 0\,2 & 21 \\ \underline{0} & \end{array}$$

Logo:

42 ÷ 2 = 21

Um outro exemplo: na aula anterior, registramos a divisão de 632 por 4 pelo processo longo. Esta mesma divisão, pelo processo breve, ficaria registrada assim:



• 6 centenas divididas por 4 dá 1 centena

• Como 1 x 4 = 4, para 6 faltam 2, porque 6 – 4 = 2

• Teremos agora 23 dezenas que divididas por 4 dá 5 dezenas

• 5 x 4 = 20 e para 23 faltam 3

• Teremos agora 32 unidades que, divididas por 4 dá 8 unidades

• 8 x 4 = 32, para 32 faltam 0

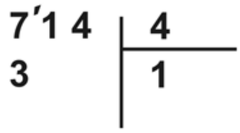
Observe que no processo breve há uma nova exigência: as subtrações não são registradas e precisam ser feitas "de cabeça". Para que isso possa ser realizado com facilidade pelos alunos, é necessário um bom conhecimento dos fatos básicos da divisão. Para fazer a subtração, é comum usarmos a idéia de "quanto falta para", ou seja fazer uso da ação de completar. Esta forma de operar mentalmente costuma ajudar os alunos a registrarem apenas o resultado da subtração.

O professor deve ser especialmente cuidadoso em apresentar exemplos com dificuldades crescentes para o registro no algoritmo abreviado, levando os alunos a desenvolver mentalmente todas as etapas necessárias para o processo. Por exemplo, para realizar a divisão de 714 por 4,

- *"Sete centenas podem ser divididas por 4?"* (sim)

- *"Quantas centenas vamos obter...?"* (1)

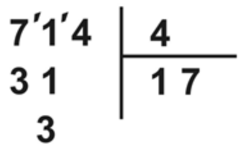
- *"Uma vez quatro é igual a quatro. Para sete faltam..?"* (3)



- *"Baixando o 1, temos agora 31 dezenas. Podemos dividir por 4?"* (sim)

- *"Quantas dezenas vamos obter..?"* (7)

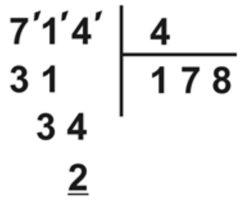
- *"Sete vezes quatro, 28, para 31 faltam...?"* (3)



- "Baixando o 4, temos agora 34 unidades. Podemos dividir por 4?" (sim)

- *"Quantas unidades vamos obter...?"* (8)

- *"Oito vezes quatro dá 32, para 34 faltam...?"* (2)

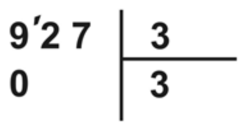


Mais um exemplo: vamos dividir 927 por 3:

- *"Nove centenas podem ser divididas por 3?"* (sim)

- *"Quantas centenas vamos obter...?"* (3)

- *"3 vez 3 é igual a 9. Para nove faltam...?"* (0)



- *"Baixando o 2, temos agora 2 dezenas. Podemos dividir por 3?"* (não – vai dar zero)

- *"Que devemos fazer...?"* (registrar o zero na ordem das dezenas, e ver que ainda restaram duas dezenas)

```
9'2'7 | 3
      |----
02    | 30
```

- *"Baixando o 7, temos agora 27 unidades. Podemos dividir por 3?"* (sim)

- *"Quantas unidades vamos obter..?"* (9)

- *"9 vezes 3 é igual a 27, para 27 faltam ...?"* (0)

```
9'2'7' | 3
       |-----
0 2 7  | 3 0 9
    0
```

Só quando o aluno tiver compreendido e fixado bem a divisão por um algarismo, é que o professor deverá introduzir a divisão por dois algarismos pelos processos longo e abreviado. Lembre-se também de sempre utilizar situações–problema no estudo dos algoritmos, para permitir que os alunos percebam sempre a utilidade dos processos em desenvolvimento.

Atividades que levam o aluno a utilizar corretamente o algoritmo longo na divisão por números de mais de um algarismo

A divisão por números de mais de um algarismo vai exigir que seus alunos tentem diversas multiplicações e subtraiam o resultado do dividendo, para saber se estão corretas. Assim, para ser realizada com eficiência, ela vai exigir a habilidade de fazer estimativas, caso contrário, o trabalho será muito árduo, podendo desestimular o aluno a fazer uso do processo. Vamos ver alguns exemplos, já reforçando desde o início a necessidade de estimar resultados.

- Vamos dividir 312 por 13.

Iniciamos pelas centenas. Como o resultado da divisão de 3 por 13 é zero, registramos este valor no quociente, na ordem das centenas e consideramos 31 dezenas.

```
3'1 2 | 1 3
      |-----
      | 0
```

Agora precisamos encontrar o resultado de 31 por 13. Isso exige a capacidade de fazer uma estimativa, para perceber que 13 x 2 é suficiente e que 13 x 3 é excessivo. Fazemos então a subtração 31 – 26, obtendo 5 dezenas de resto. Chame a atenção de seus alunos para o fato de que 5 é menor do que 13!

```
 3 1'2 | 1 3
       |-----
-2 6   | 0 2
 0 5
```

Baixamos as duas unidades, ficando com 52 para dividir por 13. Mais uma vez, o aluno deve estimar o resultado. Uma sugestão é olhar apenas para os algarismos que ocupam a casa das dezenas. (5 no 52 e 1 no 13). Como o resultado da divisão de 5 por 1 é 5, podemos estimar que o resultado será menor ou igual a 5. Como 52 é apenas um pouco maior do que 50, vamos tentar 4, obtendo 4 x 13 = 52.

```
 3 1'2' | 1 3
        |------
-2 6    | 0 2 4
 0 5 2
–   5 2
    ---
    0
```

Ofereça aos seus alunos meios para fazer melhores estimativas e meios para verificar se estão ou não encontrando o valor correto para a divisão. Eis algumas boas sugestões:

• Ignorar o algarismo das unidades nos valores envolvidos na estimativa de uma aproximação do quociente. Assim, por exemplo, se queremos dividir 337 por 43, podemos fazer uma primeira estimativa olhando apenas para 33 e 4. Com isso, sabemos que o valor do quociente não pode exceder 8. Ao fazer a conta: 43 x 8, verificamos que o resultado, 344, é muito grande, então precisamos diminuir o quociente. Tentamos 7: 43 x 7 = 301, o resultado procurado.

• É possível melhorar um pouco a estimativa acima, considerando o valor que ocupa a ordem das unidades do divisor. Se este for um valor maior do que 5, muito provavelmente sua primeira estimativa será muito grande, pois o divisor já estará próximo da dezena seguinte. Por exemplo: ao dividir 427 por 58, a estimativa pelas dezenas (42 e 5) nos dá como resultado 8. No entanto, 58 já é um número próximo a 60, e para esta dezena a melhor estimativa seria 7. Verificando os resultados, vemos que 58 x 8 = 464 (muito grande) e que 58 x 7 = 406 (valor correto).

• Sempre verificar se o resto parcial obtido após a subtração é menor que o divisor – caso contrário, o quociente parcial encontrado foi estimado para baixo. Assim, ao dividir 337 por 43, se usarmos 6 x 43 = 258, por exemplo, obtemos uma subtração possível. No entanto, como 337 – 258 = 79, obtemos um resto maior que 43 – ou seja, sabemos que estimamos para baixo. Isso significa que ainda é possível retirar pelo menos mais um grupo de 43 unidades de 337. Ao fazermos 43 x 7 = 301 e subtrairmos este valor de 337 obteremos 36. O resto menor que 43 mostra que não é possível retirar nem mais um grupo de 43 unidades do dividendo.

• Usando estimativas, o aluno pode verificar se a ordem de grandeza do quociente encontrado está correto. Assim, por exemplo, se o quociente encontrado para a divisão de 540 por 5 for 18, o aluno pode perceber que 18 x 5 < 100, ou que 500 divididos por 5 dá 100, logo esta resposta não pode estar correta.

Lembre-se de que usar estas sugestões com relativa eficiência exige prática. Assim, o professor deve, através de perguntas, levar seus alunos a fazer estimativas e verificar os resultados parciais por eles encontrados.

• Vamos agora aplicar estas sugestões para dividir 3704 por 68.

Inicialmente observamos que não é possível dividir 3 milhares por 68, nem tampouco 37 centenas por 68 (ou seja, em ambos os casos o resultado é zero). Assim, iniciamos o processo dividindo 370 dezenas por 68, obtendo um resultado em dezenas.

Fazendo a estimativa: $37 \div 6 = 6$. No entanto, como 68 é muito próximo de 70, estimamos também $37 \div 7 = 5$. Vamos tentar este segundo valor: 68 x 5 = 340. Como o resto da subtração é menor que 68, sabemos que 5 dezenas é o resultado correto.

3 7 0′2	6 8
– 3 4 0	5
3 0	

Baixamos agora as 2 unidades, ficando com 302 unidades para dividir por 68. Mais uma vez, o aluno deve estimar o resultado. Estimando $30 \div 5 = 6$ (sabemos que 68 x 5 = 340, logo, 5 é muito grande). Fazemos a estimativa: $30 \div 7 = 4$. Vamos tentar este valor. Temos 68 x 4 = 272. Fazemos, então, a subtração, e verificamos que o resto é menor que o divisor, ou seja, o valor está correto.

$$\begin{array}{rr|l} & 3\,7\,0'\,2' & 6\,8 \\ \cline{3-3} - & 3\,4\,0 & 5\,4 \\ \cline{2-2} & 3\,0\,2 & \\ - & 2\,7\,2 & \\ \cline{2-2} & 3\,0 & \end{array}$$

PARA SABER MAIS

Para compreender melhor a dificuldade que os alunos enfrentam para usar o algoritmo abreviado da divisão em uma divisão por dois ou mais algarismos, vamos comparar os processos longo e abreviado em um mesmo cálculo.

- Vamos dividir 3845 por 36.

Iniciamos o processo dividindo 38 centenas por 36. Como os cálculos nesta etapa são simples de efetuar mentalmente, o algoritmo breve é econômico se comparado ao algoritmo longo. Fazemos 1 x 36 = 36, para 38, faltam 2, e continuamos o processo.

Algoritmo Longo

$$\begin{array}{rr|l} & 3\,8'\,4\,5 & 3\,6 \\ \cline{3-3} - & 3\,6 & 1 \\ \cline{2-2} & 2 & \end{array}$$

Algoritmo Abreviado

$$\begin{array}{r|l} 3\,8'\,4\,5 & 3\,6 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array}$$

Na segunda etapa desta divisão, também não há grandes diferenças entre os dois formatos do algoritmo. Ao baixar o 4 que ocupa a ordem das dezenas, ficamos com 24 dezenas. Como 24 não pode ser dividido por 36 (ou, melhor dizendo, o resultado da divisão é zero), escrevemos zero na ordem das dezenas do quociente, subtraímos zero e prosseguimos o processo.

Algoritmo Longo

$$\begin{array}{rr|l} & 3\,8'\,4'\,5 & 3\,6 \\ \cline{3-3} - & 3\,6 & 1\,0 \\ \cline{2-2} & 2\,4 & \\ & -\,0 & \\ \cline{2-2} & 2\,4 & \end{array}$$

Algoritmo Abreviado

$$\begin{array}{r|l} 3\,8'\,4'\,5 & 3\,6 \\ \cline{2-2} 2\,4 & 1\,0 \end{array}$$

É na terceira etapa que vamos notar uma grande diferença. Ao baixar o 5 que ocupa a ordem das unidades, será necessário dividir 245 unidades por 36. No *algoritmo longo*, estimando 6 (= 24 ÷ 4) como resultado, fazemos a conta 6 x 36 = 216, e subtraímos, com o auxílio do algoritmo da subtração, este resultado de 245, obtendo 29 (um valor menor que 36) como resto.

No entanto, para utilizar o *algoritmo breve* na mesma lógica, deveríamos fazer mentalmente as contas 6 x 36 = 216 e 245 – 216 = 29. É claro que isto é muito difícil, mesmo para a grande maioria dos adultos. Assim, para utilizar o algoritmo breve nestes casos, recorremos a um processo auxiliar, que nos permite efetuar cálculos mentais parciais, e chegar ao mesmo resultado ao final do processo.

Algoritmo Longo

$$\begin{array}{rr|l} & 3\,8'4'5' & 36 \\ - & \underline{3\,6} & 1\,0\,6 \\ & 2\,4 & \\ & \underline{-\,0} & \\ & 2\,4\,5 & \\ - & \underline{2\,1\,6} & \\ & \underline{2\,9} & \end{array}$$

Algoritmo Abreviado

1ª etapa: $\rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 3\,8'4'5' & 3\,\underline{6} \\ 2\,4_{(4)}5 & 1\,0\,\underline{6} \\ 9 & \end{array}$$

Cálculo Mental:
6 x 6 = 36;
36 para 45 faltam
9 e vão 4!

$\downarrow$

2ª etapa: $\rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 3\,8'4'5' & \underline{3}\,6 \\ 2\,4\,5 & 1\,0\,\underline{6} \\ \underline{2\,9} & \end{array}$$

3 x 6 = 18;
18 + **4** = 22;
22 para 24 faltam
2

Muitos de nós conhecemos os passos deste processo auxiliar, como se fosse uma "receita de bolo", mas será que realmente compreendemos o que estamos fazendo? Mais importante ainda: será que, ao ensinarmos aos nossos alunos esta "receita", eles são capazes de compreendê-la e usá-la corretamente?

• Vamos analisar as etapas desta "receita":

- Iniciamos por multiplicar 6 x 6 = 36. Esta etapa faz sentido se lembrarmos que podemos multiplicar utilizando a propriedade distributiva. Assim, podemos pensar que 6 x 36 = 6 x (30 + 6) = 6 x 30 + <u>6 x 6</u> → estamos iniciando nosso cálculo por esta parcela.

- A seguir, vamos subtrair 36 do valor na ordem das unidades. Como não é possível retirar 36 de 5, acrescentamos as 4 dezenas de que precisamos para poder fazer a diferença e verificamos que de 36 para 45 faltam 9. Registramos o 9 na ordem das unidades do resto e arrumamos alguma forma de guardar (nos dedos, na cabeça ou no papel) as 4 dezenas que usamos. Costuma-se guardar este fato como uma afirmativa aditiva: *"vão 4"*.

- Agora devemos multiplicar 6 x 30. Como o zero ocupa a ordem das unidades no 30, isso é o mesmo que fazer a multiplicação 6 x 3 e considerar o resultado como <u>dezenas</u>. Dessa forma, o valor 9, que escrevemos anteriormente na ordem das unidades do resto, não será afetado por este resultado. Fazendo os cálculos, obtemos 18 dezenas.

- Estas 18 dezenas são adicionadas às 4 do *"vão 4"*, fornecendo um total de 22 dezenas. Estas 22 dezenas são, então, subtraídas das 24, deixando um resto de 2 dezenas, que adicionadas às 9 unidades anteriormente obtidas, nos dão o resto correto: 29.

• Vamos analisar mais um exemplo, utilizando o algoritmo breve: $1245 \div 27$.

Iniciamos pela divisão de 124 dezenas por 27:

1 2 4′5′	2 7
1 6	4

Cálculo Mental: 124 ÷ 27 = 4 (estimativa);
4 x 7 = 28, para 34 faltam **6**, e vão 3.
4 x 2 = 8, mais 3 é igual a 11, para 12, falta **1**.
→ resto 16, menor que divisor, Ok!

A seguir, baixamos o 5, obtendo 165 unidades para dividir por 27:

1 2 4′5′	2 7
1 6 5	4 6
0 3	

Cálculo Mental: 165 ÷ 27 = 6 (estimativa);
6 x 7 = 42, para 45 faltam **3**, e vão 4.
6 x 2 = 12, mais 4 é igual a 16, para 16, falta **0**.
→ resto 3, menor que divisor, Ok!

Acompanhando o processo passo a passo, podemos que observar os cálculos mentais foram realizados de uma forma completamente diferente de qualquer outra anteriormente utilizada. Em primeiro lugar, nós intercalamos as operações de multiplicação e subtração necessárias para fazer a divisão: multiplicamos pelas unidades do divisor, subtraímos da ordem mais à direita do valor a ser dividido, multiplicamos pelas dezenas do divisor, subtraímos da segunda ordem do valor a ser dividido. Em segundo lugar, nós realizamos a subtração pela idéia de completar (quanto falta para), que não é a base para o algoritmo da subtração. Ou seja, uma outra técnica para a subtração, diferente da usual, que está sendo utilizada neste processo.

Esta forma completamente nova de operar pode explicar a dificuldade da maioria dos alunos com o algoritmo abreviado da divisão, quando o divisor tem mais de um algarismo. No entanto, alunos que aprenderam anteriormente outra técnica para subtrair, baseada na idéia de completar – em especial, aqueles que a utilizam regularmente – costumam apresentar maior facilidade na compreensão e utilização do algoritmo abreviado da divisão. A provável causa deste fenômeno pode ser que o número de etapas novas a serem aprendidas é bastante reduzido para estes alunos, que podem se valer de conhecimentos anteriormente adquiridos e assimilados.

Assim, vamos cruzar as fronteiras do estudo do algoritmo da divisão e voltar um pouco atrás para estudar mais uma técnica de subtração.

Para além das fronteiras

Um outro algoritmo para a subtração

Nesta seção, vamos apresentar sugestões para o estudo de mais um algoritmo da subtração: aquele que ajuda no processo de divisão pelo algoritmo abreviado. Embora só estejamos apresentando este algoritmo neste ponto, suas idéias iniciais já foram discutidas no capítulo 8, e ele pode ser apresentado bem mais cedo, junto com os demais algoritmos da subtração. De fato, para muitas crianças, este passará rapidamente a ser o algoritmo preferido, pois ele evita a necessidade desagrupar as ordens superiores, substituindo esta idéia por uma bem mais simples: a idéia do *"vai 1"*.

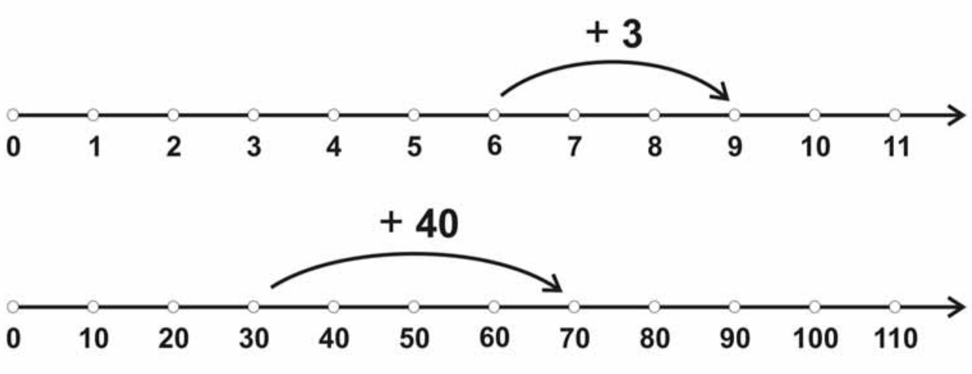
Como já dissemos, este algoritmo está baseado na idéia básica de completar. Por isso, em sua forma prática, este algoritmo é lido de ‘baixo para cima’, sempre perguntando ‘quanto falta de... para chegar em ...?’. Para iniciar seus alunos neste algoritmo, comece com exemplos simples, sem que haja necessidade de reagrupar. Um material de apoio que pode ajudar seus alunos a compreender melhor este algoritmo é a reta numérica, ou diversas delas, em diferentes escalas.

Por exemplo: 79 – 36. Arme o algoritmo e inicie perguntando:

$$\begin{array}{r} 7\,9 \\ -\,3\,6 \\ \hline 4\,3 \end{array}$$

- *“Quanto falta de 6 unidades para chegar a 9 unidades?”* (3 – registre a resposta)

- *“Quanto falta de 3 dezenas para chegar a 7 dezenas?”* (4 dezenas – registre a resposta)



Introduza agora um exemplo com uma situação que corresponde a um reagrupamento no algoritmo da subtração. Diga que a subtração 63 – 28 será realizada por um processo diferente. Conduza um diálogo como este com seus alunos:

$$\begin{array}{r} 6\,3 \\ -\,2_{(1)}8 \\ \hline 5 \end{array}$$

- *“Quanto falta de 8 unidades para chegar a 3 unidades?”* (não é possível fazer esta conta).

- *“Isso mesmo, então, quanto falta de 8 unidades para chegar a 13?”* (5 – registre este valor na ordem das unidades).

- *“Muito bom, vamos registrar que usamos uma dezena a mais. Ao invés de retirar esta dezena do minuendo, vamos fazer um “vai 1” para o subtraendo”.*

$$\begin{array}{r} 6\,3 \\ -\,2_{(1)}8 \\ \hline 3\,5 \end{array}$$

Neste ponto, lembre aos seus alunos as propriedades já estudadas da subtração. Se necessário, por meio de exemplos, mostre que o efeito de retirar 1 do minuendo é exatamente o mesmo de acrescentar 1 ao subtraendo. Complete a conta:

- *“Duas dezenas mais uma são 3. Quanto falta de 3 dezenas para chegar a 6 dezenas?”* (3 dezenas – registre a resposta)

Faça diversos exemplos com seus alunos, não esquecendo de destacar os casos nos quais este algoritmo é especialmente vantajoso em relação ao algoritmo tradicional. Por exemplo: 700 – 258.

$$\begin{array}{r} 700 \\ -\ 2_1 5_1 8 \\ \hline 442 \end{array}$$

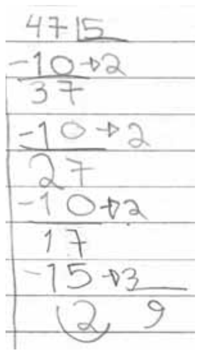
- *"Quanto falta de 8 unidades para chegar a 10 unidades?"* (2 – registre a resposta e afirme o "vai 1")

- *"Cinco dezenas mais uma são 6. Quanto falta de 6 dezenas para chegar a 10 dezenas?"* (4 dezenas – registre a resposta e afirme o "vai 1")

- *"Duas centenas mais uma, são 3. Quanto falta de 3 centenas para chegar a 7 centenas?"* (4 centenas – registre a resposta)

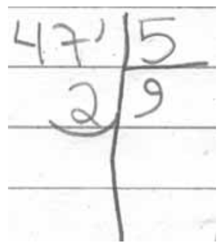
ESCUTE SEU ALUNO A professora mostrou para as crianças uma mesma divisão simples (47 ÷ 5) resolvida pelos três algoritmos trabalhados nas aulas 12 e 13 (ver abaixo), pedindo que elas dessem suas opiniões sobre cada um deles.

A



B

C



Apresentamos algumas das respostas dos alunos:

Bento:

A 3ª conta é bem fácil, mas, nela você precisa usar bastante a cabeça, pois ela só tem praticamente o resultado, você precisa fazer a "conta na cabeça.

Julia:

O jeito mais rapido de fazer é a maneira C. O jeito mais fácil de entender é A porquê é a mais detalhada e esplica melhor.

Gabriela:

O jeito que é mais facil de entender é o 1 que também é o mais longo. O 3 eu não consigo entender muito bem.

Maria:

Nas contas A e B, além de usar divisão, também se usa subtração e multiplicação.

Rodrigo:

Eu acho a Conta A muito parecida
Com a B Mas a B é mais rápida e
A você vai retirando e retirando

Parece consenso entre as crianças que o algoritmo A, por subtrações sucessivas, é muito trabalhoso – nas palavras de Rodrigo, *"você vai retirando e retirando"*. Entretanto, há indícios de que elas conseguem entender bem o processo de divisão feito por esse método. Eles também exprimem, em sua maioria, preferência pelo algoritmo B, por acharem mais rápido que o primeiro e bastante compreensível.

As opiniões se dividem mesmo quando consideramos o processo curto da divisão – temos desde os entusiastas, como Bento, que o acham muito fácil, até aqueles que, como Gabriela, admitem abertamente que *"eu não consigo entender muito bem".* Muito interessante também é o depoimento de Maria, que reconhece que as operações de subtração e multiplicação são necessárias para desenvolver os cálculos com os algoritmos A e B, mas não reconhece que estas mesmas operações estão sendo usadas, na forma de cálculo mental, na divisão curta. A opinião de Rodrigo parece mostrar que, para as crianças, o algoritmo curto da divisão é o que menos se relaciona com os outros. Ele reconhece similaridades apenas entre os dois primeiros.

LEMBRE-SE

Nas aulas 12 e 13, vimos três processos pelos quais pode ser trabalhado o algoritmo da divisão. Em todos os casos, fizemos questão de ressaltar a importância do uso de material de apoio e a importância do sistema de numeração.

Quando tratamos da divisão por um algarismo o processo abreviado está baseado apenas em fatos básicos. Assim, em geral, é possível fazer os cálculos mentalmente. Porém, isto não é verdade quando se trata de dividir por números de dois ou mais algarismos. Nestes casos, usualmente, não conseguimos fazer "de cabeça" as multiplicações e as subtrações necessárias. O algoritmo abreviado vai exigir, então, uma técnica operatória bastante diferente do algoritmo longo. Esta técnica apura a capacidade do aluno em desenvolver cálculos mentalmente, e vale a pena ser trabalhada, desde que o professor o faça com bastante cuidado, em etapas com níveis de dificuldade crescente.

ATIVIDADES PARA O PROFESSOR

1. Contando Casos: faça um pequeno relato sobre uma experiência com seus alunos, que esteja relacionada com os temas discutidos nesta aula.

2. Registre as perguntas que o professor deve fazer, as respostas esperadas e os registros parciais obtidos para levar o aluno a usar corretamente o algoritmo breve para dividir 513 por 3.

3. Use as sugestões de estimativas e as verificações dos resultados para fazer as seguintes divisões pelo processo longo:

(a) 819 ÷ 37 (b) 2345 ÷ 18 (c) 1005 ÷ 41

4. Adapte as sugestões para fazer estimativas e verificar resultados desta aula para o caso de o divisor ser um número de três algarismos.

5. Sugira e resolva pelo menos três subtrações nas quais o novo algoritmo aprendido nesta aula é mais econômico do que o algoritmo usual da subtração.

6. Resolva as divisões do exercício 3 pelo processo breve, registrando um diálogo com seus alunos para os passos necessários.

7. Recolha em sua escola dois exemplos de alunos trabalhando a divisão longa por um número de dois ou mais algarismos e analise o trabalho destes alunos.

8. Recolha em sua escola dois exemplos de alunos trabalhando a divisão curta por um número de dois ou mais algarismos e analise o trabalho destes alunos.

AULA 14

MÚLTIPLOS E DIVISORES

OBJETIVOS DESTA AULA

• Apresentar estratégias para conceituar e calcular divisores e múltiplos de números naturais.

• Apresentar estratégias para conceituar e calcular divisores comuns e múltiplos comuns de números naturais.

• Conhecer os números primos, e sua importância no estudo de múltiplos e divisores.

• Conhecer os critérios de divisibilidade, e sua importância para facilitar a descoberta de divisores de um número.

TEXTO PARA LEITURA

O estudo de múltiplos e divisores é extremamente importante para que seus alunos possam lidar bem com as operações no conjunto dos números racionais. Os números racionais, aqueles que admitem representação tanto na forma de fração quanto na forma de números decimais, são fundamentais para muitas aplicações da nossa vida, eles são usados no nosso sistema monetário e em diversas outras situações de medição.

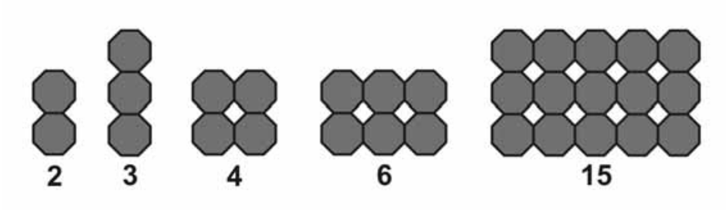
Porém, independentemente de sua importância para ampliação dos conjuntos numéricos, o estudo de múltiplos e divisores pode ser muito interessante por si só. Porém, se dissociado do estudo das operações de multiplicação e divisão e da resolução de problemas, ele dificilmente despertará o interesse do seu aluno, pois é difícil para uma criança nesta faixa de escolaridade ter a disciplina de aprofundar um estudo apenas porque este poderá vir a ser útil em futuros desenvolvimentos – esta idéia é ainda muito abstrata para eles.

Por outro lado, não há como negar que o principal contexto do estudo de múltiplos e divisores é a própria Matemática. Seus alunos serão solicitados a iniciar o desenvolvimento de novas habilidades, como o reconhecimento e a validação de regularidades numéricas. Em situações como estas, jogos e desafios podem ser de grande valia para a consecução dos objetivos, tornando as atividades mais prazerosas.

O estudo de múltiplos e divisores vai trazer à tona novas questões e novos raciocínios, vai permitir a solução de novos problemas, vai fazer com que seus alunos conheçam muitas regularidades numéricas e também uma das maiores (e mais fascinantes) irregularidades da Matemática – os imprevisíveis números primos, que vem desafiando por milênios a curiosidade do homem e seu desejo de romper os limites do saber matemático.

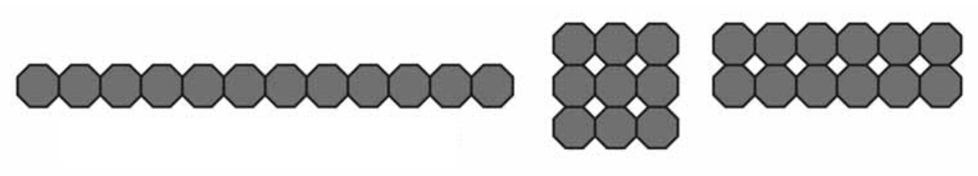
Um pouco de história

O problema de encontrar múltiplos e divisores já estava presente na matemática grega. Com sua forma peculiar de ligar geometria e números, eles repararam que certos números podiam ser dispostos de forma 'retangular', enquanto outros só admitiam uma forma 'retilínea'. Ser da forma retilínea significa que não é possível formar mais de um tipo de retângulo com a representação geométrica de suas unidades – o único possível é aquele com um dos lados igual a 1 e o outro igual ao próprio número. A figura abaixo ilustra esta afirmativa. Observe, que nesta representação, podemos "ler" os seguintes produtos de números naturais: $2\times1 = 2$, $3\times1 = 3$, $2\times2 = 4$, $2\times3 = 6$ e $3\times5 = 15$.



Os gregos observaram que os números 'retilíneos', como 2, 3, 5, 7 e muitos outros, não podiam ser divididos por outros números além da unidade e deles próprios (apenas dois divisores)– estes são os números primos. Os números 'retangulares', por outro lado, admitem diversas disposições – estes são os números compostos (com mais de dois divisores). Por exemplo, o número 12 pode ser arranjado nas seguintes disposições, todas diferentes entre si, e que correspondem aos produtos (1×12), (4×3) e (2×6):

disposições de 12 unidades



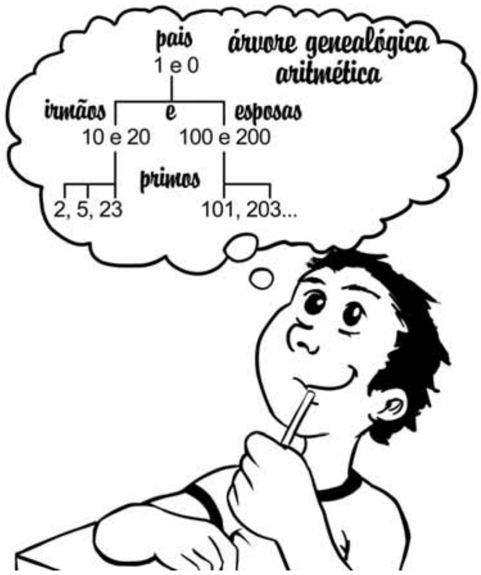
Os gregos também perceberam que os números compostos eram obtidos como produtos de números primos, que passaram, então, a ser considerados como "geradores por multiplicação" dos números naturais, fazendo com que ocupassem um lugar importante na matemática grega. A primeira definição conhecida de número primo aparece no livro *Os Elementos* de Euclides, escrito no século III A.C. e que é lido e estudado até os nossos dias. Os gregos logo notaram, também, que conhecer os números primos não era tão fácil como se podia inicialmente pensar: eles não se distribuem de uma maneira previsível entre os números naturais e existem infinitos deles.

A certeza de que sempre haverá números primos desconhecidos e a tentativa de descobrir se há alguma regra geral para encontrá-los, têm fascinado a humanidade por muitos séculos. Muito antes do advento do computador (para fazer as contas para nós), e de se encontrar aplicações para estes números, já se conheciam primos com mais de 30 ordens decimais. Hoje, os números primos muito grandes, são extremamente úteis para gerar códigos de segurança em comunicação via Internet, exatamente por que é tão difícil encontrá-los.

Mas estes números eram procurados apenas pelo prazer de saber, como em 1876, quando um matemático chamado Lucas, anunciou como sendo primo o seguinte número, com 39 ordens decimais:

$$2^{127} - 1 = 170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727$$

Esse número, quase impossível de ser lido, apesar de todo esse tamanho, só tem dois divisores: ele mesmo e a unidade. Por muitos anos, este foi o maior número primo conhecido, mas a história não acaba aqui: em 1952, aplicando o mesmo método usado por Lucas e cálculos feitos pelos primeiros computadores, foi anunciado que $(2^{2281} - 1)$ também é primo. No início de 2005, matemáticos, munidos de computadores ultramodernos e ainda usando a mesma teoria, anunciaram a descoberta de mais um primo, o maior já encontrado – sua escrita no S.D.N. excederia uma página inteira de nosso livro.



Assim, podemos dizer que os números primos têm uma característica de desafio, que parece atiçar o homem a romper os limites. Para os que apreciam o conhecimento matemático, os números primos são até hoje tão fascinantes como o Monte Everest é para os apreciadores de alpinismo. Eles estão lá – e precisam ser conquistados!

SUGESTÕES DE ATIVIDADES

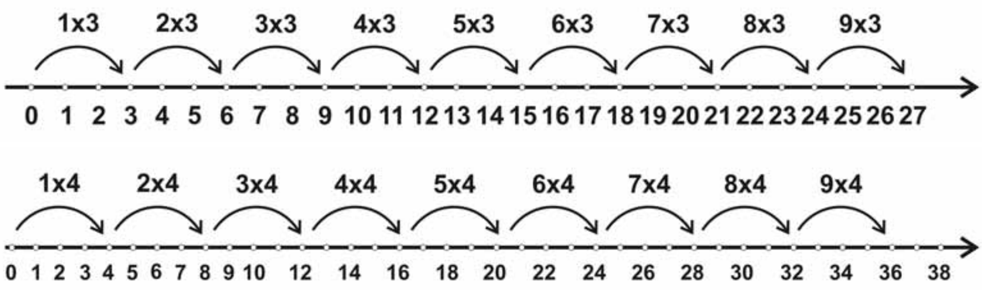
Atividades envolvendo múltiplos e divisores não devem se constituir em um "capítulo à parte". Elas podem e devem ser desenvolvidas durante todo o processo de aprendizagem das operações de multiplicação e divisão, desde o estudo dos fatos básicos. Procedendo desta maneira, o momento de sistematizar e aplicar este conhecimento ocorrerá de forma natural.

Atividades que levam os alunos a conceituar múltiplos e divisores

- A bota de muitas léguas

Atividades como, as propostas na aula 9, explorando a bota de muitas léguas com suporte da reta numérica, podem ser estendidas para ajudar na conceituação de múltiplos e divisores. Além disso, se forem desenvolvidas em paralelo com o estudo do algoritmo da divisão, podem contribuir muito para que os alunos compreendam esta técnica.

Repare, por exemplo, que ao dar pulos de tamanho 3 partindo do zero, você estará obtendo os múltiplos de 3. Veja as representações dos múltiplos de três e quatro até 9×3 e 9×4 na reta numérica:



Diferentes grupos de alunos podem se responsabilizar por criar representações como estas, para múltiplos de diferentes números (ou seja, diferentes saltos da bota) e você pode exibir o resultado deste trabalho no mural da turma.

Uma vantagem desta representação na reta, associada à idéia de passos, é levar o aluno a perceber que, como esta "estrada" não termina (a semi-reta é infinita à direita e o conjunto dos números naturais é infinito), os múltiplos de um número também não terminam.

Este modo de trabalhar pode ser explorado em várias outras situações:

1) jogo da descoberta

Explore estas representações e faça conexões com as operações de multiplicação e divisão. Você pode, por exemplo, montar uma "jogo das descobertas", na qual equipes de alunos devem responder perguntas variadas sobre o tema e, após conferir com o professor, contam para todos os demais colegas o que descobriram Durante o desenvolvimento da atividade, use uma grande reta numérica no chão ou várias, em papel pardo, sobre as carteiras agrupadas para as crianças consultarem.

Faça perguntas como:

- *"11 é múltiplo de 3?"*(não)

- *"Qual o múltiplo de 3 mais próximo de 17?"* (18)

- *"Eu posso alcançar o número 46 partindo do zero e pulando de 4 em 4? Por que?"* (não, porque 46 não é múltiplo de 4)

- *"Qual o menor múltiplo de 7?"* (zero)

- *"Qual o terceiro menor múltiplo não nulo de 9?"* (27)

- *"todo número é múltiplo de 1? Por que?"* (sim, porque pulando de 1 em 1 todos os números são usados)

- *"Se somarmos dois múltiplos de 3 ainda vamos obter um múltiplo de 3?"* (sim)

- *"Se subtrairmos um múltiplo de 4 de outro múltiplo de 4 ainda vamos obter um múltiplo de 4?"* (sim)

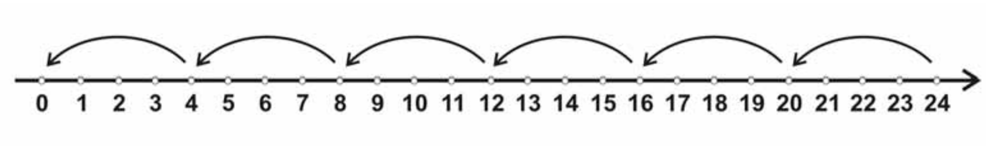
- *"Dê exemplo de uma adição de números que não são múltiplos de 3 mas que a soma deles é um múltiplo de 3"* (11 + 4 = 15, por exemplo)

- *"Dê três exemplos de números que são múltiplos de 3 e 4 ao mesmo tempo"* (12, 24, 36,48, etc...)

2) voltando ao zero

Use a reta numérica também como apoio no estudo de divisores de um número. Você pode propor brincadeiras de chegar ao zero partindo de diferentes números e usando a bota de muitas léguas.

Por exemplo, pergunte a seus alunos se é possível, partindo do 24 e pulando de 4 em 4 chegar ao zero. Os alunos fazem a experiência na reta numérica e verificam que sim.



Pergunte então

- *"Vocês chegaram ao zero?"* (sim)

- *"Quantos pulos vocês tiveram que dar?"* (seis)

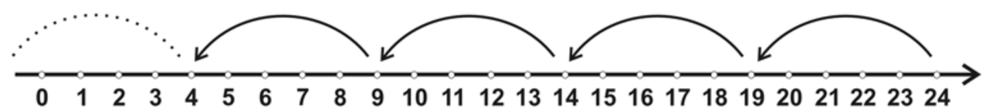
- *"Então, quantas vezes o quatro cabe dentro do 24?"* (6 vezes)

- *"O quatro é um divisor de 24?"* (Sim)

- *"Por que?"* (Porque o resto da divisão é zero ou porque 6x4=24)

Você pode perguntar ainda se eles acham que 6 também é um divisor de 24 e, se necessário, permitir que eles façam a experiência para constatar que 6 "cabe" exatamente quatro vezes no 24. Chame a atenção para: $4\times6 = 6\times4 = 24$, logo $24\div4 = 6$ e $24\div6 = 4$.

Em outro momento, pergunte se os alunos acham que pulando de 5 em 5, a partir do 24, eles chegariam ao zero. Os alunos podem fazer a experiência e verificar que não.



Explore com eles o fato de que:

• 24 não é múltiplo de 5,

• 5 não é divisor de 24,

• o 5 "cabe" 4 vezes dentro do 24 e ainda restam 4 unidades. Ajude seus alunos e perceber as relações entre estas conclusões e o uso do algoritmo para o cálculo de $24\div5 =$.

Atenção

Não esqueça de explorar que qualquer número tem como divisores o 1 e o próprio número. No nosso exemplo, isto pode ser visto propondo usar a bota de 1 légua e a bota de 24 léguas. Com a bota de 1 légua preciso de 24 pulos para chegar ao zero, enquanto com a bota de 24 léguas chego ao zero em um pulo só.

3) resolução de problemas

Proponha diversos problemas a partir da idéia de voltar ao zero. Você pode elaborar problemas que incentivem a reversibilidade do raciocínio, como no exemplo a seguir:

João vestiu a bota de nove léguas, deu 4 pulos tentando voltar ao zero mas só conseguiu chegar no ponto 3. De que ponto João partiu?

Para obter o ponto de partida, o aluno estará aplicando, na prática, o resultado que tanto destacamos nas aulas relacionadas com a operação de divisão:

dividendo = divisor × quociente + resto

Faça diversas variações deste problema, sempre oferecendo diferentes dados e trocando a pergunta, para que os alunos encontrem: ora tamanho do pulo, ora quantos pulos foram dados, ora o ponto de chegada e ora o ponto de partida.

4) calçando diferentes botas.

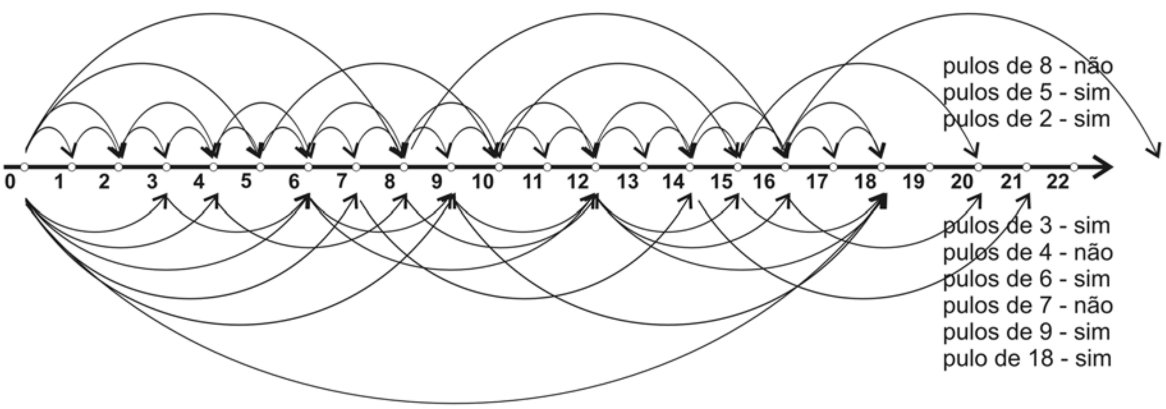
Esta atividade ajuda a estabelecer todos os divisores de um determinado número, especialmente se o professor aproveitar o trabalho dos alunos e discutir suas respostas.

Material necessário: cartões numerados de 18 até 35 (por exemplo); folha de trabalho com várias retas numéricas (ou papel quadriculado, para que as crianças construam suas retas).

Distribua seus alunos em equipes de 4 e sorteie um número para cada equipe. Cada time deve tentar sair do zero e chegar ao valor mostrado em seu cartão, calçando diferentes botas. Você também pode inverter: os alunos podem partir do valor dado e tentar chegar ao zero, reforçando a idéia do resto na divisão.

Cada equipe deve anotar os tamanhos de pulo que servem para chegar ao número sorteado (os divisores) e "explicar" o que aconteceu quando testaram os outros tamanhos de pulo. Veja registros possíveis para o sorteio do 18:

Registro do grupo de Cláudia:



Registro do grupo de Joana:

Botas que chegam certinho no 18 → *1, 2, 3, 6, 9 e 18*

Bota de 4 léguas → *com 4 pulos pára antes do 18 e com 5 pára depois do 18*

Bota de 5 léguas → com 3 pulos pára antes do 18 e com 4 pára depois do 18

Registro do grupo de Mário:

Tamanhos que dão certo → 1, 2, 3, 6, 9, 18

4 léguas → dando 4 pulos cheguei no 16 e preciso de mais dois passos com a bota de 1 légua, ou um pulo com a bota de 2 léguas.

5 léguas → dou 3 pulos e chego no 15, aí tenho que usar outra bota. Pode ser 1 pulo de 3. E com 4 pára depois do 18.

E assim por diante...

Registro do grupo de Bruno:

1, 2, 3, 6, 9 ou um pulão de tamanho 18

Bota de 4 léguas → $18 = 4 \times 4 + 2$

Bota de 5 léguas → $18 = 3 \times 5 + 3$

E assim por diante...

- **Descubra o espião.**

Para seqüências numéricas como as abaixo, solicite que seus alunos descubram qual número é o "espião", ou seja, qual número não deveria estar na lista:

- Os múltiplos de 5 são: 0, 5, 10, 15, 20, 23, 25, 30, ...

- Os divisores de 24 são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12 e 24

ESCUTE SEU ALUNO

Antecipamos esta seção nesta aula para aproveitar os registros dos alunos mostrados acima. Observe que todos eles, em sua própria linguagem, mostram ser capazes de decidir quais são os divisores de 18. No entanto, eles realizam a tarefa de formas bem diferentes. Há diferenças na linguagem utilizada por cada grupo de alunos e na escolha das informações a serem registradas.

Observe que o grupo de Cláudia considera suficiente seu registro por imagens. Ao lado, eles apenas escrevem suas conclusões. Estes alunos parecem se convencer com o argumento geométrico e respondem apenas ao que foi perguntado. No entanto, valores maiores que 9 não foram testados, o que nos leva a concluir que eles já chegaram a algumas conclusões matematicamente relevantes sobre as atividades que estão realizando.

Já o grupo de Joana escolhe apresentar seu relato mantendo-se próximo ao conto de fadas – todas as respostas são oferecidas em termos das botas. Ao contrário do grupo anterior, este grupo se preocupa em relatar o que acontece quando o tamanho do pulo não leva exatamente ao 18, registrando o maior número de pulos antes de chegar aos 18 e o valor consecutivo, ou seja, o primeiro a ultrapassar o ponto escolhido.

O grupo de Mário já não se atém às botas, mas sim ao tamanho do pulo, demonstrando uma maior capacidade de abstração e de se fixar no problema matemático a ser resolvido. Eles também buscam estratégias para lidar com o resto no caso de pulos de 4 e 5 léguas. Embora esgotem todas as possibilidades de lidar com o resto para o pulo de 4 léguas, não o fazem para o pulo de 5 (esquecem de considerar as botas de 1 e 2 léguas).

Finalmente, o grupo de Bruno lista corretamente os divisores de 18 e faz boa utilização da linguagem matemática para expressar sua solução para o problema, nos casos de botas de 4 e 5 léguas Ao escrever *"$18 = 4\times4 + 2$"* e *"$18 = 3\times5 + 3$"*, não só fica registrado que estes tamanhos de pulo não atingem o ponto 18, mas também quantos pulos foram dados e quanto falta para chegar no ponto considerado.

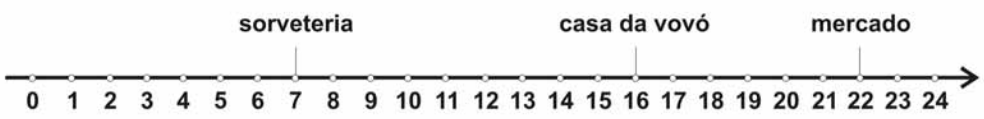
SUGESTÕES DE ATIVIDADES (CONT.)

A seguir, damos continuidade à seção de sugestões de atividades, discutindo a formação de outros conceitos importantes , como o mmc, o mdc, e números primos.

Atividades que levam os alunos a conceituar múltiplos e divisores comuns

• Marcando encontros.

Material necessário: cartões para sorteio do tamanho do pulo, reta numerada com pontos assinalados, como por exemplo:



Com as crianças em duplas, diga para cada uma delas qual o tamanho do pulo de sua bota.

Proponha então o seguinte problema:

Vocês estão no ponto zero, calçando suas botas, cada um tem algumas tarefas a cumprir e querem marcar um encontro para mais tarde, o mais perto possível do mercado. Onde vocês devem marcar este encontro encontro?

Estabeleça com regra do jogo que as crianças só devem marcar encontros em pontos que as duas botas possam alcançar.

Exemplo: se um aluno tem a bota de duas léguas e outro tem a bota de três léguas, como:

Múltiplos de 2: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28 ...; e
Múltiplos de 3: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30...

Então, eles só podem marcar encontros nos pontos 6, 12, 18, 24 ..., pois estes são os pontos que as duas botas alcançam. Como 22 (o ponto do mercado) está entre 18 e 24, as crianças ainda terão que decidir qual deles é mais próximo do mercado.

Esta atividade deve ser feita com diversos valores numéricos diferentes, ajudando as crianças a aprimorarem, aos poucos, a idéia de múltiplo comum. Inclua também problemas nos quais três pessoas devem se encontrar.

Aos poucos, vá mostrando aos seus alunos que a coleção de múltiplos comuns de dois (ou mais números) é – ela própria – uma coleção de múltiplos de novo número (no nosso exemplo, esse número é o 6) – esse novo número será chamado de **menor múltiplo comum**. O termo e sua abreviação, **mmc**, vão aparecendo aos poucos, a medida que os alunos forem se convencendo que este é um valor importante.

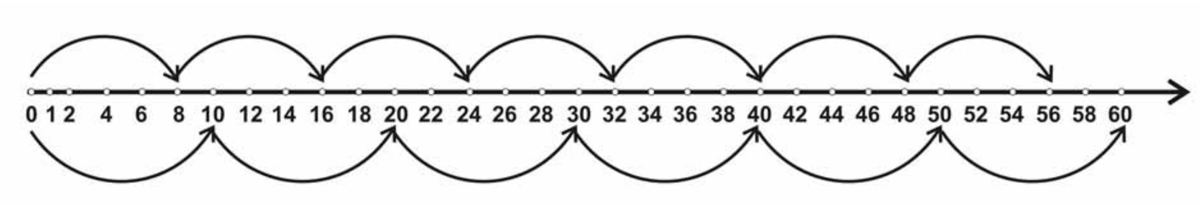
Atenção

Muitos alunos acham mais fácil encontrar primeiro o produto dos dois números como um múltiplo comum entre eles. No entanto, se você explorar problemas como este, mudando sempre o local onde querem se encontrar (inclusive para fora do campo visual da reta) eles notarão que, para determinadas situações, o **mmc** é muito mais útil.

Por exemplo:

João tem uma bota de 8 léguas e Lia uma de 10 léguas. Saindo do zero, eles querem se encontrar no cinema, que se localiza no ponto 126. Em que ponto eles devem marcar seu encontro?

Se os alunos utilizarem o produto dos números (80), eles terão que decidir entre se encontrar nos pontos 80 ou 160, ambos bem distantes do cinema (126). No entanto, se eles utilizarem o **mmc** destes dois valores (40), eles poderão se encontrar no ponto 120.



• Compartilhando pares de botas.

Com os alunos trabalhando em duplas, e, num segundo momento, grupos de três ou quatro, dê um valor numérico para cada um deles escrito no alto de uma folha de papel quadriculado. Coloque sobre a mesa cartões com todos os números menores ou iguais aos números escritos nos papéis. Estabeleça que os cartões são os tamanhos de pulos possíveis.

Proponha que as crianças decidam para quais valores de pulos, partindo do ponto que corresponde ao valor numérico em sua folha, elas conseguem chegar exatamente na origem. O cartão correspondente deve, então, ser separado pela criança. Diga ainda que se dois precisarem de um mesmo cartão, eles devem colocá-los em uma área comum, para compartilhá-lo.

Por exemplo:

José recebe uma folha com o número 18 e na folha de Paulo está escrito o número 12. Sobre a mesa são colocados os cartões assinalados com os números de 1 a 18.

- José deve se apropriar dos cartões: 1, 2, 3, 6, 9 e 18.
- Paulo deve se apropriar dos cartões: 1, 2, 3, 6 e 12.

Observe que os cartões numerados com 1, 2, 3 e 6 devem ser compartilhados pelos dois meninos.

Atenção

Esse é um jogo que pode ajudar as crianças a desenvolverem boas estratégias aproveitando-se do cálculo mental. Aos poucos elas devem começar a não testar certos valores, porque já sabem de antemão que eles não funcionam. Por exemplo: elas devem se aperceber de que números maiores que o seu valor não precisam ser testados, nem números entre sua metade e o valor. Elas também devem parar de testar o 1 e o próprio número, pois estes sempre servem, e devem começar a aplicar os critérios de divisibilidade (que vamos ver logo adiante) para evitar fazer a experiência para valores simples.

Aos poucos, vá chamando atenção dos seus alunos que o número 1 sempre deve ser compartilhado (desafie-os a responder por que). Leve-os também a perceber que estes valores compartilhados são, na verdade, o conjunto dos divisores de um novo número – o maior de todos os divisores comuns (no nosso exemplo, esse número é o 6). Este número passa a ser chamado de máximo divisor comum. Como no caso dos múltiplos comuns, o novo termo e sua abreviação, **mdc**, devem ser introduzidos, sem pressa, de preferência quando o conceito tiver sido construído e os alunos precisarem de uma notação para se referir a ele.

Atividades que levam os alunos a reconhecer os números primos

- O Crivo de Eratóstenes[1]

Esta atividade nos dá uma boa oportunidade de explorar a história da Matemática. Inicie por contar a história de Eratóstenes (ou por sugerir uma pesquisa sobre ele) e informe seus alunos que eles vão ter a chance de refazer um trabalho deste grande matemático grego, pelo qual ele é famoso até hoje. O resultado desta atividade deve ir para o mural da turma, como material de consulta, pois será muito útil no estudo de múltiplos e divisores.

Vamos exemplificar o processo encontrando os primos até o número 50 (você pode escolher outro limite para trabalhar com seus alunos). O Crivo de Eratóstenes não inclui o número 1. Iniciamos o processo pelo 2. Verifique com seus alunos que 2 é primo, pois só é divisível por 1 e por ele mesmo.

Vamos marcar os múltiplos de 2, exceto por ele próprio, na tabela, com uma determinada cor (por exemplo: azul):

[1] Eratóstenes foi um matemático grego que viveu aproximadamente entre os anos 276 e 194 A.C. Ele trabalhou em Alexandria, e é famoso por medidas precisas feitas de meridianos terrestres, permitindo estimativas bastante acuradas sobre o tamanho da Terra. É também atribuída a Eratóstenes a primeira tentativa organizada de se separar os números primos dos demais números naturais, que será explorada na atividade.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Leve seus alunos a perceber que nenhum dos números marcados é primo (pois todos eles são divisíveis por 2). Você pode também ajudá-los a perceber as regularidades (todos estes números marcados terminam em 2, 4, 6, 8, ou 0).

O próximo número na tabela é 3. Como 3 não é divisível por 2, ele também é primo. Vamos agora assinalar, em cinza claro na tabela os outros múltiplos de 3. Obtemos:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

O próximo número na tabela seria o 4 – mas como ele já foi marcado, todos os seus múltiplos também já foram (todo múltiplo de 4 é também múltiplo de 2). Se necessário, faça a experiência com seus alunos.

Passamos, então para o próximo número não marcado (primo): 5.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Logo, na tabela acima estão sombreados todos os múltiplos de 2, 3, e 5, exceto por eles próprios. Observe também que o primeiro número novo que foi marcado nesta rodada foi 25 (= 5×5).

Como o 6 é um número composto, podemos passar para o 7. Neste ponto, desafie seus alunos a descobrir qual será o primeiro número não marcado que vocês vão encontrar. E confira que este número será o 49 (= 7×7).

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Para convencer seus alunos que nenhum novo numero será marcado até 50, faça a próxima etapa. Pergunte a seus alunos:

- *" Qual é o próximo número primo?" (11)*

- *"Vamos verificar se todos os múltiplos de 11 já estão marcados nesta tabela"*

Deixe que eles façam as contas, e percebam que 11×2, 11×3, 11×4 já estão marcados e que 11×5 já é maior do que 50. Agora pergunte:

- *"Qual é o próximo primo?"* (13)

- *"Vamos marcar novos números até 50 se fizermos as contas com 13?"* (não)

- *"Então, o que podemos concluir sobre os números que não foram marcados?"* (Que são todos números primos)

- *"Então, 43 é um número primo?"* (sim)

- *"Por que?"* (porque ele não é divisível por nenhum número diferente dele e do 1)

- *"E 27 é um número primo?"* (não)

- *"Por que?"* (porque 27 é divisível por 3)

- *"Muito bom – o Crivo de Eratóstenes nos dá uma boa ajuda para responder estas perguntas. Vamos colocá-lo no mural?"*

Para além das fronteiras

Este é um bom momento para ajudar seus alunos a construir bons hábitos de registro de dados. Para facilitar a leitura das informações, incentive-os a fazer uma legenda para o Crivo de Eratóstenes (esta também deverá ir para o mural).

Múltiplos de 2	Múltiplos de 5
Múltiplos de 3	Múltiplos de 7

Atividades que levam o aluno a reconhecer e utilizar os critérios de divisibilidade

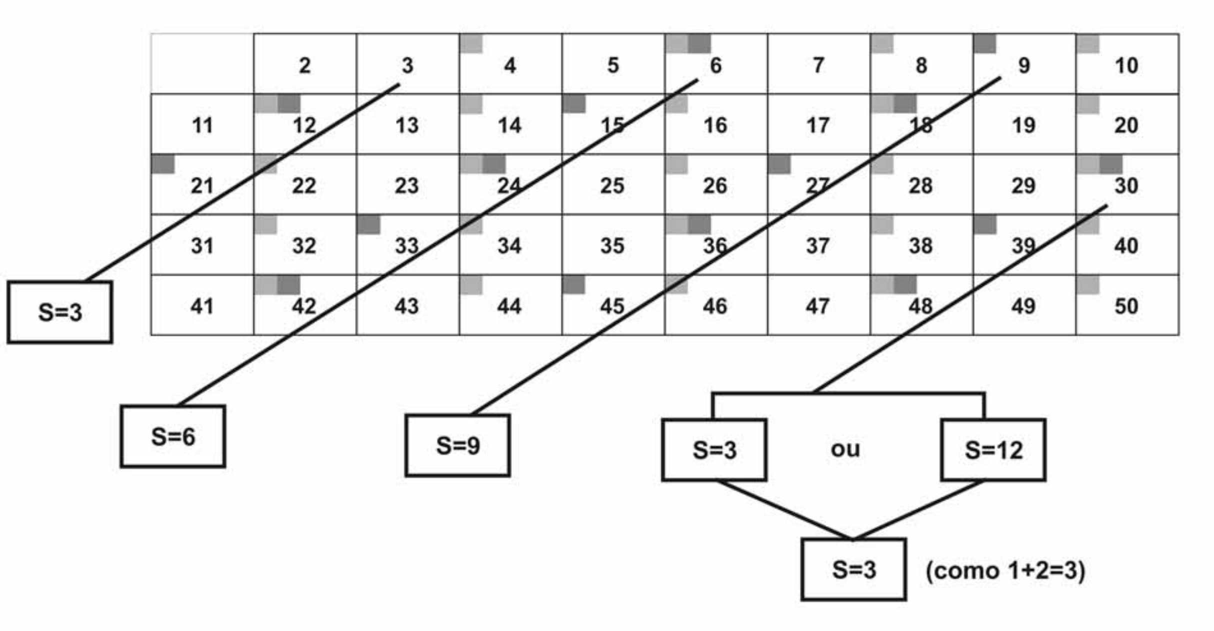
Explore mais uma vez o Crivo de Eratóstenes para levar seus alunos a perceberem os critérios de divisibilidade. Nesta representação (especialmente se você tiver feito um registro até um valor maior do que exemplificado aqui – até 100, por exemplo) vão ficar claras algumas regularidades dos múltiplos de um determinado número. Por exemplo: por verificação direta, seus alunos deverão concluir que:

• Os múltiplos de 2 são os números pares, ou seja, aqueles nos quais a ordem das unidades é ocupada por um dos seguintes algarismos: 0, 2, 4, 6, ou 8.

• Os múltiplos de 5 são aqueles nos quais a ordem das unidades é ocupada por um dos seguintes algarismos: 0 ou 5.

• Múltiplos de 10 são, ao mesmo tempo, múltiplos de 2 e de 5, assim a ordem das unidades é ocupada pelo algarismo 0.

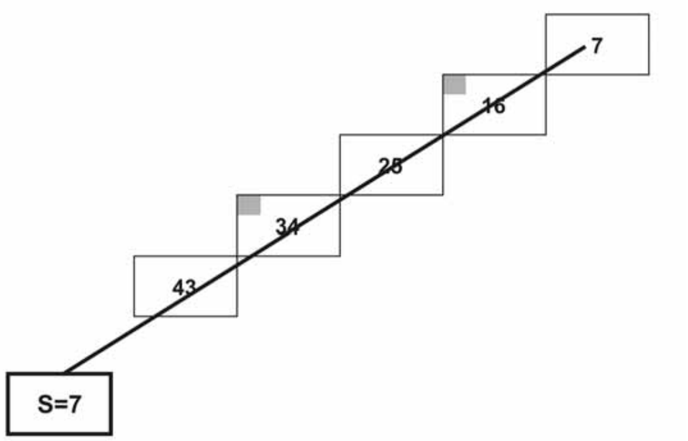
Para estudar o critério de divisibilidade por 3, observe que os múltiplos de três obedecem a uma regularidade geométrica e numérica no Crivo de Eratóstenes:



Se chamarmos de S a soma dos algarismos do número, veremos que ela é sempre igual a um múltiplo de 3. Para a parte do Crivo que representamos, os resultados possíveis foram 3, 6, 9 ou 12. Mas haverá outras somas! Por exemplo: em 78, teremos soma 15. Se esta soma for um número de dois algarismos, podemos voltar a adicioná-los, obtendo, ao final, soma 3, 6 ou 9.

A distribuição geométrica nos ajuda a ver que os múltiplos de 9 são aqueles cujas somas de algarismos for 9 (ou 18 ou 27, etc. – se seus algarismos forem adicionados outra vez, darão 9 como resultado).

Escolha valores “espalhados” pelo Crivo e adicione os algarismos do número. Observe com seus alunos que o valor de S não será um múltiplo de 3 quando o número também não o for.



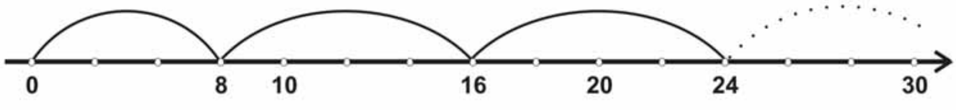
• Finalmente, um número será divisível por 6 se for, simultaneamente, divisível por 2 e por 3. Assim, não há um critério "novo", mas a aplicação de dois já conhecidos. Os critérios de divisibilidade serão especialmente úteis para a decomposição de números em fatores primos, permitindo que os cálculos sejam feitos mentalmente.

LEMBRE-SE Se seu aluno está avançando na Matemática, cada vez menos ele necessitará de apoio de materiais concretos e os números e suas operações irão, aos poucos, se tornando mais e mais ferramentas para estudos e idéias mais avançadas. O estudo de múltiplos e divisores é um dos primeiros passos nesta direção. Se bem trabalhados, estes conceitos servirão de base para outros que se seguirão a eles e farão com que todo o processo de cálculo relacionado à frações fique bastante simplificado.

Fique atento à nomenclatura associada a este estudo e tenha certeza que seu aluno compreende que as afirmativas: "A é múltiplo de B"; "A é divisível por B"; "B é divisor de A" e "B é fator de A" significam exatamente a mesma coisa, ou seja que existe um outro número natural C tal que $A = B \times C$.

O estudo de múltiplos e divisores muda nosso olhar sobre os números naturais, pois descobrimos uma série de comportamentos regulares, que são comuns a quase todos eles, e outros que são muito específicos de um só número. Por exemplo:

• Os **divisores** de 6 são os números pelos quais podemos dividir o 6 sem que haja resto, ou seja: 1, 2, 3 e 6. Repare que são quatro divisores (número finito) e que o menor deles é o 1 e o maior é o 6. Troque 6 por qualquer outro número diferente de zero e continua a ser verdade que: o menor divisor é o 1 e o maior é o próprio número, e só existe um número finito de divisores.



• Os **múltiplos** de 6 são os números que podem ser divididos por 6 sem deixar resto: 0, 6, 12. 18, 14, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, ... (ou seja, qualquer número obtido pela multiplicação de 6 por outro natural – e há infinitos deles). Troque o 6 por qualquer outro número diferente de zero e continua a ser verdade que existem infinitos múltiplos deste novo número, sendo zero o menor deles e ele próprio o segundo menor.

• O único número com um só divisor é o 1 (só é possível dividir 1 por ele mesmo). Qualquer outro número natural pode ter exatamente dois divisores (como o 2, 3 ou 5) ou muitos (isto é: mais que dois, como o 6, o 15, etc).

• O zero não é considerado quando trabalhamos múltiplos e divisores porque seu comportamento nestes aspectos é completamente irregular. Como "$0 \times$ qualquer número" é igual a zero, ao contrário de todos os outros números naturais, ele tem infinitos divisores, os divisores são maiores que ele próprio, e só tem um múltiplo: ele mesmo.

ATIVIDADES PARA O PROFESSOR

1. Contando Casos: faça um pequeno relato sobre uma experiência com seus alunos relacionada com os temas discutidos nesta aula.

2. Procure em livros–texto ou outros materiais didáticos atividades voltadas para a compreensão do conceito de múltiplos e divisores de um número. Escolha algumas sugestões para registrar aqui, e faça uma breve avaliação deste material.

3. Procure em livros–texto ou outros materiais didáticos atividades voltadas para a compreensão dos conceitos de múltiplos comuns de dois (ou mais) números e de **mmc.** Escolha algumas sugestões para registrar aqui, e faça uma breve avaliação deste material.

4. Procure em livros–texto ou outros materiais didáticos atividades voltadas para a compreensão dos conceitos de divisores comuns de dois (ou mais) números e de **mdc**. Escolha algumas sugestões para registrar aqui, e faça uma breve avaliação deste material.

5. Procure em livros–texto ou outros materiais didáticos atividades voltadas para a compreensão do conceito de números primos. Escolha algumas sugestões para registrar aqui, e faça uma breve avaliação deste material.

6. Procure em livros–texto ou outros materiais didáticos atividades voltadas para a conceituação e a utilização dos critérios de divisibilidade. Escolha algumas sugestões para registrar aqui, e faça uma breve avaliação deste material.

7. A seguir, apresentamos a lista de todos os números primos até 300:

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59

61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151

157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227 229 233 239 241 251

257 263 269 271 277 281 283 293

(a) Repare, por exemplo, que não há números primos entre 109 e 113. Isso significa uma seqüência de três valores seguidos não primos (110, 111 e 112).

Encontre as duas maiores seqüências de números (entre 1 e 300) nas quais nenhum número primo pode ser encontrado.

(b) Registre todos os pares de números primos que estão distantes apenas duas unidades (assim como 137 e 139, por exemplo).

(c) Baseando-se em suas respostas nos itens anteriores, responda, justificando, se é ou não fácil encontrar números primos.

8. Verifique se há uma regularidade geométrica na distribuição dos múltiplos de 11 no Crivo de Eratóstenes. Descreva esta regularidade (pode ser por meio de uma figura).

9. Liste todos os múltiplos de 11 até 250, e verifique que também há uma regularidade numérica: a diferença entre a soma dos algarismos que ocupam as ordens pares e a soma dos algarismos que ocupam a ordem ímpar deve dar zero ou múltiplo de 11 (neste caso, é só subtrair outra vez e obter zero).

10. Elabore uma atividade que ajude seus alunos a responder o seguinte questionamento: *"Zero é múltiplo de 2.153"? Por que?"*

AULA 15

ENSINAR E APRENDER MATEMÁTICA: LIMITES E POSSIBILIDADES

OBJETIVOS DESTA AULA

• Refletir sobre a importância de metodologias de ensino de matemática que visem à formação de alunos matematicamente competentes.

• Propor recursos e opções metodológicas dentro dessa visão, para o ensino dos conteúdos matemáticos.

TEXTO PARA LEITURA

Ao longo dos anos, a matemática vem ganhando importância para a vida das pessoas. A aplicação dos conhecimentos matemáticos também vem se ampliando nas ciências em geral. No comércio, na indústria e nas mais simples atividades cotidianas, atuamos nos valendo de diferentes conceitos e habilidades matemáticas. O dia–a–dia está cheio de situações, nas quais lidamos com o número, com as operações, com o pensamento combinatório, com a proporcionalidade, com a organização espacial etc. O pensamento matemático bem desenvolvido e um bom domínio de conceitos são fundamentais para a leitura, a interpretação e a atuação na realidade na qual estamos inseridos, de forma crítica e autônoma. Em muitas situações e propostas de atividades apresentadas ao longo desse livro, evidenciamos as conexões entre a matemática e a vida.

A relevância da matemática para nossa vida e, por outro lado, o desencanto freqüentemente manifestado por muitas pessoas por essa área do conhecimento, é uma questão que nos convida a refletir acerca dos conteúdos e dos métodos da matemática escolar.

As idéias acerca de que matemática é difícil, abstrata, que se fundamenta em normas, símbolos e procedimentos desprovidos de significado, que aprender matemática exige o uso de uma terminologia incompreensível, estão fortemente presente nas concepções das pessoas. A matemática é freqüentemente considerada assim por alunos, e até mesmo por pessoas que não mais freqüentam a escola, quando rememoram suas histórias com a matemática. E não foi e nem é à toa! As práticas de ensino nessa área têm sido marcadas por colocar a matemática isolada do mundo, desconectada de suas aplicações, e entendendo a aprendizagem como baseada no domínio de técnicas operatórias e algoritmos.

Em relação aos alunos que estão no sistema de ensino atualmente, não temos coisas boas a dizer. Os dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) mostram que a grande maioria desses alunos, ao final das quatro primeiras séries, não possuem habilidades básicas em matemática.

Certamente, esse insucesso é decorrente de muitos fatores, dentre os quais destacamos, no âmbito das políticas públicas a falta de investimentos e as poucas oportunidades para formação continuada, que é fundamental para que possamos repensar a nossa prática. Estes fatores, além de muitos outros tem importância para o bom desempenho dos alunos e dos professores, em suas funções. Entretanto, apesar de não podermos resolver muitos dos problemas por que passa a educação brasileira, é preciso fazermos o que estiver ao nosso alcance.

O que é ser matematicamente competente?

Por muitas vezes, a competência matemática é identificada como a habilidade das pessoas de realizar cálculos, ou pela aptidão de fazer contas com o uso dos algoritmos. É claro que essas habilidades são importantes para as pessoas viverem com autonomia – mas a formação dos alunos deve ir além disso. Desenvolver um ensino baseado no domínio e bom uso de procedimentos de forma mecânica e memorizada não ajuda os alunos a serem matematicamente competentes.

Um dos pressupostos básicos considerados na elaboração desse livro é a importância indiscutível de se proporcionar uma sólida formação conceitual às crianças, no decorrer da educação básica. Aprender matemática é um direito de todas as crianças, sendo fundamental para que se desenvolvam como indivíduos e como elementos da sociedade. Além disso, conhecer as idéias e métodos próprios da matemática, permite que os alunos apreciem o seu valor e entendam a sua natureza.

Devemos compreender que de nada servirão os conhecimentos matemáticos supostamente aprendidos na escola, se os alunos não forem capazes de mobilizá-los em situações concretas de uso, na escola ou na própria vida. Nesse sentido, desenvolver a competência matemática dos nossos alunos envolve, além de um trabalho bem feito que favoreça a construção de conhecimentos, dar condições a eles de, diante de uma situação a ser resolvida, serem capazes de identificar e usar os conhecimentos necessários para a sua solução. De que formas podemos orientar o processo de ensino e aprendizagem matemática visando à contribuir para a formação de alunos matematicamente competentes?

Encontrando caminhos

Nessa perspectiva o ensino mecânico, de treinamento de estratégias e de memória, perde o sentido. Tudo muda, a partir da idéia de que a aprendizagem é um processo de construção ativa do conhecimento, pelas crianças.

A aprendizagem se dá por meio das relações que as crianças estabelecem com a realidade. Nesse sentido, as interações sociais e as situações desafiadoras que possibilitam reflexões, discussões e descobertas pelos sujeitos favorecem o processo de construção do conhecimento. As aulas de matemática devem propiciar uma dinâmica em que o aluno deixe de ser um ouvinte passivo e discuta com seus colegas e com seu professor seus acertos, erros, hipóteses, caminhos ou estratégias, e conclusões acerca do que está aprendendo. Dessa forma, a aprendizagem de matemática mobiliza os alunos à construírem seu conhecimento por meio de uma participação ativa. Aliás, essa vem sendo a maneira como a matemática, como qualquer outra ciência, vem se construindo, ao longo da história: construções humanas, que avançam a partir das necessidades e motivações do homem em sociedade, numa determinada época.

Esta nova sala de aula pede um novo papel para o professor. Entendemos que esse papel deve ser de orientador da aprendizagem; ajudar as crianças a encontrarem seus próprios caminhos; motivar a reflexão, a discussão e as descobertas por meio de perguntas adequadas aos objetivos previamente planejados.

Além de ter objetivos claros, as atividades e situações escolhidas devem ser também contextualizadas, adequadas à faixa etária, e motivar o interesse na busca de soluções. Explorando contextos significativos para o aluno, contribuímos para que ele entenda a Matemática como um campo de saber que lhe possibilita compreender melhor situações à sua volta. Além disso, em Matemática devemos ampliar o conhecimento adquirido em um contexto buscando princípios gerais, que permitam a transferência deste conhecimento para novas situações. Assim, geramos novos conhecimentos, e estes ganham novos significados.

As relações entre os conhecimentos matemáticos novos e os conhecimentos já construídos, e também com os conteúdos das outras disciplinas escolares devem ser construídas na escola. Estas relações favorecem a construção de significados para o que está sendo aprendido, e possibilitam a compreensão da matemática como ferramenta necessária ao estudo das questões das outras áreas do conhecimento.

REPENSANDO PRÁTICAS E ESTRATÉGIAS EM SALA DE AULA

Aprendendo nas atividades em grupo

Em diferentes momentos, as atividades em grupo forma incentivadas nas aulas anteriores. Vocês tiveram a oportunidade de encontrá-las como sugestão para o ensino de, praticamente, todos os conteúdos tratados nesse livro.

As atividades em grupo contribuem significativamente para a construção de saberes e competências em matemática. Quando nossos alunos trabalham coletivamente, é necessário que eles, além de resolverem a situação proposta, discutam e justifiquem estratégias de resolução e a validade de resultados, para chegarem a um consenso. Assim, desenvolvem a argumentação, a comunicação e interpretação de idéias matemáticas. Observam e avaliam diferentes formas de encaminhamento, desenvolvendo a capacidade de crítica e autocrítica. Na aula sobre resolução de problemas, você encontra bons exemplos de problemas em grupo.

O trabalho em equipe possibilita, ainda, o entendimento do erro como uma etapa do processo de construção do saber, pois a discussão coletiva estimula os alunos a reverem o que fizeram, e a reconstrução da solução inicialmente apresentada. Estas são atitudes e competências muito exigidas pela sociedade moderna e para o exercício pleno da cidadania.

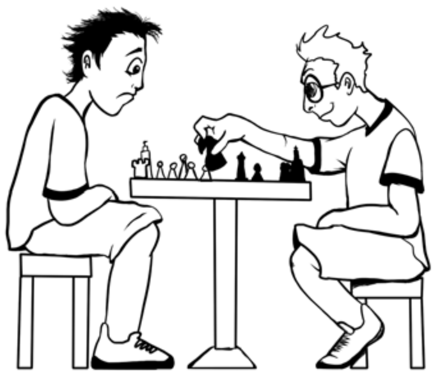
As atividades coletivas podem acontecer em pequenos grupos ou no grande grupo, que é a classe. Em função de nossos objetivos, podemos lançar mão de agrupar os alunos de diferentes maneiras, visando estimular a produção coletiva nas aulas de matemática.

A atividade que envolve a classe toda precisa ser bem organizada e orientada pelo professor, para o alcance dos objetivos.

Os jogos, além da brincadeira

Durante todo o curso, defendemos o uso de jogos e brincadeiras. Os jogos podem dar ao desenvolvimento do pensamento lógico matemático e do pensamento espacial das crianças uma grande contribuição. Apresentamos várias sugestões com grande potencial de aprendizagem, como o JOGO DA BATALHA, e o JOGO DO COBRE-TUDO para a construção do número. Sugerimos o jogo dos NÚMEROS CRUZADOS, e o DOMINÓ DA ADIÇÃO para o ensino dos fatos básicos, entre outros. Ao jogarmos, vários aspectos do pensamento matemático são colocados em questão. Em situações de jogo é preciso tentar, observar, analisar, conjecturar, verificar, reformular, habilidades fundamentais para o pensamento matemático, para aprender e para viver. Jogar envolve, também, a aceitação de desafios, e não só relacionados aos conteúdos matemáticos. No jogo, estamos desafiados a encontrar estratégias de ação que permitam transformar as condições da partida.

O desenvolvimento das capacidades de fazer estimativas e cálculo mental também é favorecido pelo jogo. Além disso, quando jogam, as crianças lidam com símbolos, submetem-se a convenções e a regras, o que é importante não só para aprender e usar matemática, como para a vida em sociedade.



Insistimos que os jogos não devem ficar reservados para momentos informais, de lazer ou relaxamento, desarticulados das aulas de matemática. Devem estar presentes como problemas a serem solucionados.

Resolvendo problemas

A capacidade de resolver problemas deve ser desenvolvida pela escola, que fundamenta e justifica todo o trabalho com a matemática escolar. Os problemas dão vida aos conteúdos matemáticos, desde que bem escolhidos. Se você observar bem, a resolução de problemas permeia todos os capítulos deste livro, sendo nossa principal linha condutora. Não foi à toa que dedicamos a aula 6 a esse assunto.

Por meio de experiências com diferentes tipos de problemas, o aluno envolve-se com o fazer matemático, formula hipóteses e investiga. Nessa linha de trabalho, o ponto de partida da atividade matemática não é o aprendizado das técnicas ou das definições, mas sim o problema. Assim, um conhecimento matemático novo deve ser aprendido a partir de um problema que interessa ser solucionado e, para isso, conceitos devem ser investigados, explorados e ensinados. A partir de uma situação–problema que necessita ser resolvida, o conhecimento pode então ser sistematizado e generalizado.

Os problemas precisam, claro, ser bem escolhidos e enunciados com clareza. Devem explorar contextos da realidade dos alunos, para que possam gerar interesse e mobilizar o debate, a busca de soluções. Bons problemas podem favorecer a interdisciplinaridade, isto é, as conexões entre matemática e as demais áreas de conhecimento. Podem evidenciar os vínculos da matemática com situações cotidianas nas quais a matemática é necessária como uma ferramenta. Possibilitam o desenvolvimento da capacidade de traçar estratégias, permitem a diversidade de caminhos para se chegar a solução, estimulando o pensamento investigativo e crítico dos alunos.

Contando a história da matemática

Antes de mais nada, o professor precisa entrar em contato com a construção histórica do conhecimento, para compreender melhor o conceito, as dificuldades e as motivações desta construção e também porque as dificuldades históricas, muitas vezes, são semelhantes às apresentadas pelos alunos em fase escolar. Além disso, a utilização da história da matemática como um recurso para a compreensão dos processos de construção de conhecimento pode motivar a aprendizagem dos alunos. Para os alunos, ter a chance de entender a matemática como uma criação humana, de diferentes culturas e em épocas diferentes, permite comparações entre procedimentos e conceitos no passado e no presente, dá mais segurança para buscar caminhos próprios e até inovadores, porque não! A história contribui para o desenvolvimento de uma atitude crítica sobre os conceitos matemáticos que estão aprendendo.

É importante não esquecer também que o processo de aprendizagem deve respeitar a cultura do aluno, partindo de sua realidade e ampliando, aos poucos, suas possibilidades de compreensão do mundo em que vivemos. Esta corrente de ensino tem suas origens nos trabalhos de Paulo Freire e continua sendo absolutamente fundamental em sociedades que vivem grandes desigualdades sociais, como a nossa.

Um bom exemplo do uso da história no ensino de matemática diz respeito ao ensino dos números e do sistema decimal de numeração. Conhecerem os diferentes sistemas de numeração já usados pelo homem para contar e representar quantidades, pode ajudar os alunos a entender as características do sistema decimal de numeração, e as vantagens do uso de um sistema posicional. Nesse curso, você encontra nas aulas 1, 3 e 14 elementos históricos acerca dos números e dos sistemas de numeração. Elas são úteis para você pensar em atividades que levem as crianças a identificar que a matemática é fruto de erros e acertos e que os conceitos que utilizamos hoje em dia levaram muito tempo para se consolidar.

Uma pesquisa histórica adequada ao nível de escolaridade dos alunos pode gerar discussões muito produtivas. Relacionadas com este curso, sugerimos uma pesquisa sobre o ábaco (como se usa, quais os diferentes tipos – suas vantagens e desvantagens, que culturas ainda o utilizam, quem usou ao longo da história), bastante relevante para desenvolver a compreensão do SDN e das operações. Existe também a possibilidade de diversas outras pesquisas sobre a evolução histórica dos números, enfocando diferentes sistemas de representação numérica, que pode ser bastante enriquecedora para alunos ao final desta fase de escolaridade.

A introdução da história da matemática no ensino favorece, muito, a realização de atividades coletivas. Organizados em grupos, os alunos podem ficar responsáveis por levantar elementos, ou realizar pesquisas que possibilitem a reconstrução histórica de temas que estejam sendo ensinados, em matemática. Além disso, estas pesquisas podem ser compartilhadas com todos os colegas.

RECURSOS DIDÁTICOS

O livro didático

Não podemos esquecer o papel importante que o livro didático tem para a aprendizagem. Ele pode ser um grande parceiro. Quando bem escolhido, pode contribuir de forma significativa para o alcance dos nossos objetivos. Incentivar o uso do livro pelos alunos possibilita, ainda, outras conquistas importantes para a construção de conhecimentos. Entre outras coisas, ajuda a desenvolver o hábito de leitura, e a capacidade de investigação. Um bom livro, bem utilizado, pode, motivar o gosto das crianças por matemática, estimular a autonomia e hábitos de estudo.

Procure informações sobre os livros bem avaliados para o ensino de matemática. Além disso, troque idéias com seus colegas e faça a sua escolha considerando, também, a realidade dos seus alunos e o projeto político-pedagógico da sua escola.

Outros recursos são, também, importantes e devem ser incorporados às aulas. Estes recursos podem favorecer a aprendizagem significativa dos conteúdos de Matemática, e tornar o ambiente da sala de aula rico e desafiador. Alguns foram explorados nas aulas deste curso e você provavelmente se lembra deles. Uma boa idéia também é rever o material procurando por recursos didáticos que você pode utilizar.

Livros paradidáticos

Os livros paradidáticos costumam despertar muito o interesse dos alunos. Eles se estruturam de maneira diferente dos livros didáticos. Não se organizam por séries ou ciclos, e nem tratam dos conteúdos organizados de acordo com o planejamento escolar.

Tratam, em geral em poucas páginas, de aspectos lúdicos e curiosos que envolvem determinado conteúdo. Muitos deles contam uma história na qual estão inseridos os conteúdos matemáticos. Sempre bem ilustrados, com atividades desafiadoras e bastante jogos, propiciam uma leitura fácil e agradável. Escolha, na bibliografia que apresentamos ao final do livro, aquele que pode contribuir para o seu trabalho com os diferentes conteúdos tratados nesse livro.

Trabalhando concretamente

Não podemos prescindir do uso de materiais concretos em nossas aulas, em especial para alunos dos anos iniciais do ensino fundamental. Estes materiais, estruturados ou não, permitem que o aluno descubra relações, regularidades, propriedades, ou seja, dão a oportunidade de construir conceitos. Os materiais mais conhecidos e encontrados em lojas especializadas são: o material dourado, o ábaco, os blocos lógicos e as réguas de Cuisenaire, Esses materiais podem ser industrializados, em geral de madeira ou emborrachados. São ricos em atributos e desenvolvidos especificamente para contribuir na construção de alguns conceitos. Mas estes não são os únicos (e nem sempre os melhores) para utilizarmos em nossas aulas. Neste curso você teve a oportunidade de ver a utilização de diversos outros materiais que você pode construir com seus alunos.

Outros materiais, alguns muito simples, também podem ser bastante importantes na construção de conceitos, como você teve muitas oportunidades de ver neste curso. Entre eles, destacamos:

- coleções de objetos como pedrinhas, conchinhas, botões;

- palitos de sorvete, elásticos, saquinhos de vários tamanhos e quadro de pregas;

- figuras geométricas em cartolina;

- balanças e pesos; fita métrica; réguas; ampulhetas; relógios; calendários.

Vimos que diversos materiais concretos podem ser produzidos por nós, com a participação dos alunos. Inclusive materiais estruturados podem ser reproduzidos usando sucatas, sobras de madeira, papelões, cartolina... Basta alguma habilidade e um pouco de entusiasmo!

Volte à aula 2, por exemplo, e observe a seção de atividades. Há várias sugeridas a partir do uso de materiais concretos não estruturados.

Os recursos tecnológicos

A tecnologia tem avançado rapidamente, de forma a permitir, cada vez mais, o uso de diferentes aparelhos eletrônicos de uso doméstico, como vídeos, DVD, computadores, calculadoras, por uma boa parcela da população. A freqüência do uso de calculadoras simples hoje em dia mostra que este recurso está disponível para quase todas as pessoas. Os computadores e vídeos fazem parte do rol de recursos usados por um bom número de estudantes, tanto para lazer como para realizar pesquisas e trabalhos escolares.

Em poucos minutos podemos, através da Internet, obter resultados de uma pesquisa que nos interessa, que foi realizada por pessoas que, geograficamente estão bem longe. Esses recursos precisam estar presentes na escola. Mas não como mais um penduricalho! Precisam ser incorporados ao nosso fazer pedagógico vinculado às necessidades de desenvolver competências, habilidades, construir conceitos. Quando bem utilizados, eles podem motivar a classe a se envolver efetivamente na tarefa de aprender.

Calculadoras Se, até bem pouco atrás, tínhamos que dedicar um bom tempo para ensinar nossos alunos a fazer conta corretamente com qualquer número, hoje, podemos deixar a cargo das calculadoras, ou dos computadores, rotinas mais pesadas de cálculo com grandes números. Preparar bem as crianças hoje, em matemática, não é instrumentalizá-las com fórmulas e procedimentos-padrão, mas dar-lhes condições de enfrentar situações novas e desafiadoras, de forma criativa e inteligente.

Neste livro apresentamos alguns exemplos e sugestões de atividades usando a calculadora. Este recurso pode ser usado como auxiliar na resolução de problemas, com fins de conferir resultados, ou para realizar cálculos cansativos. Podem, também, estar a serviço do desenvolvimento da capacidade de investigação acerca de curiosidades sobre os números e resultados de operações com eles, explorando e observando regularidades, por exemplo. Se bem conduzidas, as aulas com a utilização das calculadoras podem gerar um ambiente rico em desafios matemáticos. O ensino do sistema decimal de numeração e das operações pode se beneficiar muito do uso da calculadora. Veja um exemplo simples, além dos outros que se apresentamos ao longo do livro. Imaginando que a tecla 7 não pode ser usada, de que forma poderíamos realizar a operação 123 – 17 ? Faria sentido propor essa atividade para ser feita com o uso do ábaco ou por meio do algoritmo da subtração? Ela é bastante oportuna para nos mostrar que a calculadora pode estar presente no ensino de matemática, possibilitando aprendizagens importantes, e de forma prazerosa.

Os vídeos Quando bem explorados pelo professor, os vídeos são capazes de trazer simulações difíceis de serem reproduzidas em sala de aula ou aplicações em situações e lugares distantes da realidade mais imediata dos alunos. É importante ter clareza que, como os materiais concretos, o vídeo sozinho não produz mudanças significativas na aprendizagem. É preciso que o professor explore as questões conceituais, que tenha em mente os objetivos de aprendizagem, estando atento também às curiosidades que o tema, as situações, os cenários despertem nos alunos para direcioná-los de forma construtiva.

O vídeo pode ser utilizado para ilustrar algo já ensinado, para introduzir uma idéia nova, para sensibilizar os alunos para o uso da matemática no cotidiano, para abordar a evolução dos conhecimentos matemáticos ao longo da história, etc.

LEMBRE-SE • É preciso não esquecer que o material concreto não tem um fim em si mesmo. De nada adianta entregar materiais concretos aos alunos para a livre exploração ou manipulação. Isso não garante aprendizagem! Seu uso deve ser planejado e estar inserido numa proposta de trabalho que desafie os alunos a atuarem mentalmente, auxiliados pelo material. É preciso ter objetivos claros e bem definidos, sabendo onde se quer chegar, para poder intervir e favorecer uma verdadeira construção de conceitos por meio do uso dos materiais.

• Lidar com os símbolos convencionais da linguagem matemática é importante. Entretanto, é preciso que as crianças lhes atribuam significado. A utilização da linguagem matemática convencional deve surgir a partir da necessidade de nos expressarmos matematicamente de forma que haja compreensão por parte de todos.

• Trabalhe de forma integrada as diversas áreas da Matemática. Assim ao estudar números, leve seus alunos a ler, construir e interpretar gráficos, tabelas e os mais variados tipos de informações que fazem uso de grandezas e medidas (rótulos de embalagens, notícias de jornal, nota fiscal, preenchimento de cheques etc.). Estas são habilidades básicas ao cidadão de hoje.

• Os diferentes recursos que sugerimos para o ensino de matemática não são recursos excludentes. Podem e devem conviver, complementando-se.

• Atualmente, permitir ou não o uso da calculadora em nossas aulas já é uma questão ultrapassada. Foi substituída por outra, muito mais complexa e relevante: quando e como utilizar a calculadora? Lembre que o bom uso da calculadora, quando seu objetivo não for a aquisição de técnicas operatórias, deixa mais tempo para que as crianças se envolvam com diferentes estratégias para resolver um mesmo problema, para jogar, para pensar, investigar, argumentar etc.

ATIVIDADES PARA O PROFESSOR

1. Contando casos: faça um pequeno relato sobre uma experiência com seus alunos relacionada com um dos temas discutidos nessa aula.

2. Faça uma lista de coisas que você fez ontem. Tente identificar os conceitos matemáticos envolvidos nessas situações.

3. Volte ao início do livro, identifique e liste, para cada aula, materiais concretos não estruturados que foram utilizados para o estudo dos diferentes temas.

4. Escolha uma (ou mais) situação-problema que tenha sido apresentada em qualquer das aulas desse livro. Tente resolvê-la de formas diferentes das que você já viu ou usou.

5. Digite na sua calculadora o número 1 245. Realize, a seguir, uma só operação matemática para eliminar o algarismo 4, sem alterar os demais algarismos digitados. Que operação deve ser realizada? Por que? Que contribuições esta atividade pode dar aos seus alunos, na compreensão do sistema decimal de numeração?

6. Proponha outras atividades que possam estar inseridas na aula 3, com o uso de calculadoras

7. Teste a sua capacidade de fazer estimativas e cálculo mental. Que número você subtrair do lado esquerdo da expressão $37 + 42 + 59 = 96$ para que ela se torne correta? Formule outras como essa para seus alunos fazerem nas aulas de matemática, estimulando o uso da calculadora para conferir a resposta. Os temas da aula 5 são muito propícios para atividades como essa.

8. As citações abaixo são de autores consagrados da área de Educação. Identifique, em cada uma das citações, pontos de convergência com as posturas didáticas que defendemos neste curso, em especial nesta última aula, justificando e recorrendo a exemplos dos textos ou das sugestões de atividades de nossas aulas.

a) Celestin Freinet

"Na Pedagogia Freinet, a escola deve assegurar uma verdadeira formação, aquela que dê o mesmo valor à inteligência verbo-conceitual e aos mais simples trabalhos feitos com as mãos." (FREINET, 1978)

"As Invariante Pedagógica em Freinet nos dizem, por exemplo, que as crianças aprendem muito mais através da experimentação (tateio experimental), do que pelas explicações dos professores." (in SME-RJ, 1996)

b) Paulo Freire

"Enquanto necessidade ontológica a esperança precisa da prática para tornar-se concretude histórica. É por isso que não há esperança na pura espera, nem tão pouco se alcança o que se espera na espera pura, que vira, assim, espera vã." (FREIRE, 1992)

"De nada vale a teoria se esta não se orienta pela prática. É nesta relação dialética prática – teoria – prática que Paulo Freire nos convida a tecer ativa e solidariamente nossa esperança de uma educação comprometida com os interesses amplos da maioria da população." (in SME-RJ,1996)

c) Lev Semyonovitch Vygotsky

"A formação de conceitos é o resultado de uma atividade complexa, em que todas as funções intelectuais tomam parte. No entanto, o processo não pode ser reduzido à atenção, à associação, à formação de imagens, à inferência, ou às tendências determinantes. Todas são indispensáveis, porém insuficientes sem o uso do signo, ou palavra, como o meio pelo qual conduzimos as nossas operações mentais, controlamos o seu curso e as canalizamos em direção à solução do problema que enfrentamos" (VIGOTSKY,1987)

d) Jean Piaget

"A essência da autonomia é que as crianças se tornam capazes de tomar decisões por elas mesmas. Autonomia não é a mesma coisa que liberdade completa. Autonomia significa ser capaz de considerar os fatores relevantes para decidir qual deve ser o melhor caminho da ação, não considerando apenas o seu ponto de vista mas também o ponto de vista das outra pessoas." (in KAMII,1986)

"O conteúdo das assimilações e acomodações variará ao longo do processo de desenvolvimento cognitivo, mas a atividade inteligente é sempre um processo ativo e organizado de assimilações do novo ao já construído, e de acomodação do construído ao novo." (in SME-RJ,1996)

BIBLIOGRAFIA PARA O PROFESSOR

LIVROS CONSULTADOS E RECOMENDADOS

Educação

AEBLI, H. *Prática de ensino.* Rio de Janeiro: Vozes, 1975.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Fundamental (SEF). *Referenciais para formação de professores.* Brasília: MEC/SEF, 2002.

FAZENDA, I. *Prática de ensino.* São Paulo: Cortez, 1991.

HERNÁNDEZ, F., VENTURA, M. *A organização do currículo por projetos de trabalho.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

PILETTI, Claudino. *Didática especial.* São Paulo: Ática, 1985.

SALVADOR, César Coll. *Aprendizagem escolar e construção do conhecimento.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PERRENOUD, P. *A pedagogia na escola das diferenças:* fragmentos de uma sociologia do fracasso. Trad. Cláudia Schilling. Porto Alegre: Artmed, 2001.

__________. Ensinar: agir na urgência, decidir na incerteza. Porto Alegre: Artmed, 2001.

TARDIF, Maurice. Saberes docentes e formação profissional. Petrópolis, RJ: Vozes, 2003.

Educação Matemática – sugestões didáticas

AZEVEDO, M. V. R. *Jogando e construindo matemática.* São Paulo: Vap, 1999.

BORIN, J. *Jogos e resolução de problemas:* uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP, 1996.

CARDOSO, V. C. *Materiais didáticos para as quatro operações.* São Paulo: IME-USP, 1996.

CENTURIÓN, Marília. *Números e Operações*. São Paulo: Scipione, 1995.

DANTE, L. Roberto. *Didática da resolução de problemas de Matemática.* São Paulo: Ática, 1991.

LEDUR, A.; HENNEMANN, J.; WOLFF, M. S. *Metodologia do ensino e aprendizagem de matemática nas séries iniciais de 1º grau.* São Leopoldo: AMECIM/UNISINOS, 1991.

MOUZINHO, M. L. *Tratamento da informação:* atividades para o ensino básico. UFRJ/IM: Projeto Fundão, 2002.

_________. T*ratamento da informação:* explorando dados estatísticos e noções de probabilidade a partir das séries iniciais. UFRJ/IM: Projeto Fundão, 1997.

NEHRING, C. et al. *Orientações metodológicas para o uso das barrinhas de cuisenaire*. IJUí: UNIJUÍ/PADCT/CAPES, 1995, v.2.

_________. *Orientações metodológicas para o uso da base 10* (material dourado). IJUÍ: UNIJUÍ/PADCT/CAPES, 1997, v.3.

NEHRING, C.; PIVA, C. *Orientações metodológicas para construção da operação de multiplicação.* IJUÍ: UNIJUÍ, 1998.

SANTOS, V. M., REZENDE, J. F. *Números:* linguagem universal. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, projeto fundão, 1997.

SMOLE, K. C. S. DINIZ, M. I., CANDIDO, P. *Brincadeiras infantis nas aulas de matemática.* Porto Alegre: ArtMed, 2000. (Coleção Matemática de 0 a 6 anos).

_________. *Ler, escrever e resolver problemas:* habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: ArtMed, 2001. (Coleção Matemática de 0 a 6 anos).

TOLEDO, Marília. TOLEDO, Mauro. *Didática da matemática:* como dois e dois. São Paulo: FTD, 1997.

VITTI, Catarina M. *Matemática com prazer.* Piracicaba: Editora Unimep, 1995.

Educação Matemática – reflexões teórico-práticas

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Fundamental (SEF). *Parâmetros curriculares nacionais:* matemática. 1997.

BUSHAW, D. et al. *Aplicações da matemática escolar.* São Paulo: Atual Editora, 1997. Tradução de Hygino H. Domingues.

CARRAHER, D. *Senso crítico:* do dia-a-dia às ciências humanas. São Paulo: Pioneira, 1983.

CARRAHER, T. N. (Ed). *Aprender pensando.* Recife: Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco, 1983.

CARRAHER, T. N. et all. *Na vida dez, na escola zero.* São Paulo: Cortez, 1991.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. *Metodologia do ensino da Matemática.* São Paulo: Cortez, 1991.

CHACÓN. Inês Maria Gómez. *Matemática emocional:* os afetos na aprendizagem matemática. Porto Alegre: Artmed, 2003.

COLL, C., TEBEROSKY, A. *Aprendendo Matemática:* conteúdos essenciais para o Ensino Fundamental de 1ª a 4ª séries. São Paulo: Ática, 2000.

DANYLUK, O. *Alfabetização matemática:* as primeiras manifestações da escrita infantil. Porto Alegre: Sulina, 2002.

DORNELES, Beatriz. *Escrita e número:* relações iniciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

DUHALDE, M. H.,CUBERES, M. T. G. *Encontros iniciais com a matemática.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

FONSECA, Solange. *Metodologia de ensino:* matemática. Rio de Janeiro: Lê, 1997.

FRAGA, M. L. *A Matemática na escola primária:* uma observação do cotidiano. São Paulo: EPU, 1988.

KAMII, C. *Crianças Pequenas Reinventam a Aritmética*. Porto Alegre: ArtMed, 2002.

KAMII, C. DEVRIES, R. *A criança e o número:* implicações educacionais da teoria de Piaget para atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. Campinas: Papirus, 1996.

_________. *Jogos em grupo na educação infantil:* implicações da teoria de Piaget. São Paulo: Trajetória Cultural, 1991.

KAMII, C., DECLARK, G. *Reinventando a aritmética.* Campinas: Papirus, 1988.

KOTHE, S. *Pensar é divertido*. São Paulo: EPU, 1970.

KRULIK, S., REYS, R. E. (org). *A resolução de problemas na matemática escolar.* São Paulo: Atual, 1998.

MANDARINO, Mônica. MONTES, Maria José. *Qualificação profissional para o magistério.* Volume 6: Matemática. Rio de Janeiro: MEC/FUNTEVE/TVE, 1985.

MANDARINO, Mônica. *Tratamento da Informação para professores de 1ª a 4ª séries.* UFRJ/IM: LIMC, 2005.

MENDONÇA, E. R. *Matemática para o magistério.* São Paulo: Ática, 1991.

MIGUEL, Antônio. MIORIM, Ângela. *Ensino de Matemática no 1º grau.* São Paulo: Atual, 1991.

MOYSÉS, L. *Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática.* Campinas: Papirus, 1997. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).

NUNES, T., BRYANT, P. *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

POZO, Juan Ignacio. *A solução de problemas.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

RABELO, Edmar Henrique. *Textos matemáticos:* produção e identificação. Belo Horizonte: Editora Lê, 1996.

RANGEL, A. C. *Educação Matemática e a construção do número pela criança.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.

RUBINSTEIN, Cléa et all. *Matemática para o curso de formação de professores de 1ª a 4ª séries do ensino fundamental*. São Paulo: Moderna, 1997.

SMOLE, K. C. S. DINIZ, M. I., CANDIDO, P. *Resolução de problemas.* Porto Alegre: ArtMed, 2000. (Coleção Matemática de 0 a 6 anos).

ZUNINO, Delia Lerner. *A Matemática na escola:* aqui e agora. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

Educação Matemática – reflexões teóricas

BICUDO, Maria A . GARNICA, A . V. M. *Filosofia da Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

D´AMBRÓSIO, U. *Etnomatemática,* arte ou técnica de explicar e de conhecer. São Paulo: Ática, 1993.

_________. *Educação matemática:* da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 1996.

_________. *Da realidade à ação:* reflexões sobre Educação Matemática. São Paulo: Summus, 1988.

DAVIS, Philip J. *A experiência matemática.* Rio de Janeiro: Livro Técnico, 1981.

FONSECA, M. C. F. R. (org). *Letramento no Brasil:* habilidades matemáticas. São Paulo: Global, 2004.

LOVELL, K. *O desenvolvimento dos conceitos matemáticos e científicos na criança.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1988.

MACHADO, Nilson José. *Matemática e linguagem materna.* São Paulo: Cortez, 1991.

PAIS, L. C. *Didática da matemática:* uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

PARRA, Cecília, SAIZ, Irma (org). *Didática da matemática:* reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PIAGET, J. SZEMINSKA, A. *A gênese do número na criança.* Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

____________. *Formação do símbolo na criança.* Rio de Janeiro: Zahar, 1971.

PIRES, Célia Maria. *Currículos de Matemática:* da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

História da Matemática

BOYER, C. B. *História da Matemática.* São Paulo: Edgar Blucher, 1974.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática.* Campinas: Editora da UNICAMP, 1995. Traduzido por Hygino H. Domingues.

GUNDLACH, B. H. *Números e numerais.* Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula (coleção). São Paulo: Atual, 1992. Tradução de Hygino H. Domingues.

IFRAH, George. *Os números:* a história de uma grande invenção. São Paulo: Globo, 1992.

MIORIM, Maria A. *Introdução à história da matemática.* São Paulo: Atual, 1998.

Livros paradidáticos

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. *Sistemas de Numeração ao longo da História*. São Paulo: Editora Moderna, 1997.

GUELLI, O. *A invenção dos números.* São Paulo: Ática, 1992, Coleção contando a história da matemática.

_________. *Jogando com a matemática.* São Paulo: Ática, 1992, Coleção contando a história da matemática.

IMENES, L. M. *Brincando com números.* São Paulo: Editora Scipione, 2000, Coleção vivendo a matemática .

_________. *A numeração indo-arábica.* São Paulo: Editora Scipione, 1991, Coleção vivendo a matemática.

_________. *Problemas curiosos.* São Paulo: Scipione, 1991, Coleção vivendo a matemática.

_________. *Os números na história da civilização.* São Paulo: Scipione, 1990, Coleção vivendo a matemática.

JAKUBOVIC, J. *Par ou ímpar.* São Paulo: Editora Scipione, 1990, Coleção vivendo a matemática

MACHADO, N. J. *Lógica? É lógico!*. São Paulo: Scipione, 2000, Coleção vivendo a matemática.

PACHECO, E.; BURGERS, B. *Série Problemas.* (Problemas à vista; Problemas? Eu tiro de letra!; E aí, algum problema?; Vai um probleminha aí). São Paulo: Editora Moderna, 1998.

RAMOS, L. F. *O segredo dos números.* São Paulo: Ática, 1992, Coleção a descoberta da matemática.

SMOOTHEY, M. *Coleção investigação matemática.* (Estimativas; Gráficos; Números). São Paulo: Editora Scipione, 1997.

STIENECKER, D. L.;WELLS, A. *Coleção Problemas, jogos e enigmas* (Números; Adição; Subtração; Multiplicação; Divisão; Frações). Tradução de Suzana Laino Cândido. São Paulo: Editora Moderna, 1998.

WATANABE, R. *Na Terra dos Noves-Fora.* São Paulo: Editora Scipione, 1990, Coleção vivendo a matemática.

Matemática lúdica e curiosidades matemáticas

ENZENSBERG, H. M. *O diabo dos números.* São Paulo: Companhia das Letras, 1997.

GONIK, T. *Truques e quebra-cabeças com números.* Rio de Janeiro: Ediouro, 1997.

LOBATO, M. *Aritmética da Emília.* São Paulo: Editora Brasiliense, 1997.

SMULLYAN, R. *O enigma de Sherazade.* Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

TAHAN, M. *O homem que calculava.* Rio de Janeiro: Editora Record, 1996.

_________. *Matemática divertida e curiosa.* Rio de Janeiro: Editora Record, 1991.

_________. *As maravilhas da matemática.* Rio de Janeiro: Bloch Editores, 1974.

_________. *Os números governam o mundo*. Rio de Janeiro: Ediouro, 1998.

_________. *A sombra do arco-íris.* Rio de Janeiro: Editora Getulio Costa, 1941

Matemática e recursos tecnológicos

BORBA, Marcelo. PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e educação matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

LÉVI, Pierre. *As tecnologias da inteligência:* o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro, 1993.

MACHADO, Nilson José. *Matemática e educação:* alegorias tecnológicas e temas afins. São Paulo: Cortez, 1992.

Revistas de publicação periódica que tratam de Educação Matemática:

A Educação Matemática em Revista. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM): trimestral.

Revista do Professor de Matemática. Revista da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM): quadrimestral.

Revistas Interessantes

Revista Superinteressante, Editora Abril.

Revista Globo Ciência, Editora Globo.

Revista Nova Escola, Fundação Victor Civita.

Revista Nós da Escola, Multirio, Prefeitura do Rio de Janeiro.

Sites interessantes

http://www.q10.com.br/matematicahoje/

http://www.educar.sc/matematica/index.html

http://www.sbem.com.br

http://www.calculando.com.br/jogos

http://br.groups.yahoo.com/groups/hist-mat-port/

http://www.tvebrasil.com.br/salto