Ministério da Educação
Secretaria de Educação Básica
Diretoria de Apoio à Gestão Educacional

Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa

SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL E OPERAÇÕES

Caderno **04**

Brasília 2013

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Secretaria de Educação Básica – SEB
Diretoria de Apoio à Gestão Educacional

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Centro de Informação e Biblioteca em Educação (CIBEC)

Brasil. *Secretaria de Educação Básica*. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional.

Pacto nacional pela alfabetização na idade certa: Sistema de Numeração Decimal e Operações / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 2013.

88 p.

ISBN XXX-XX-XXXX-XXX-X

1. Alfabetização. 2. Alfabetização Matemática. 3. Números. 4. Sistema de Numeração Decimal. 5. Operações.

Tiragem 122.102 exemplares

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA
Esplanada dos Ministérios, Bloco L, Sala 500
CEP: 70047-900
Tel: (61)20228318 - 20228320

Sumário

SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL E OPERAÇÕES

CURRÍCULO NA ALFABETIZAÇÃO: CONCEPÇÕES E PRINCÍPIOS

CADERNO 4 | SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL E OPERAÇÕES

Organizadores:

Carlos Roberto Vianna, Emerson Rolkouski.

Comitê Gestor:

Adilson Oliveira do Espírito Santo, Liane Teresinha Wendling Roos, Mara Sueli Simão Moraes.

Consultores:

Alexandrina Monteiro, Alina Galvão Spinillo, Antonio José Lopes, Celi Espasandin Lopes, Cristiano Alberto Muniz, Gilda Lisbôa Guimarães, Maria da Conceição Ferreira Reis Fonseca, Maria Tereza Carneiro Soares, Rosinalda Aurora de Melo Teles.

Leitores Críticos:

Camille Bordin Botke, Enderson Lopes Guimarães, Luciane Ferreira Mocrosky, Larissa Kovalski, Laynara dos Reis Santos Zontini, Marcos Aurelio Zanlorenzi, Michelle Taís Faria Feliciano, Nelem Orlovski.

Autores:

Ettiene Cordeiro Guerios, Neila Tonin Agranionih, Tania Teresinha Bruns Zimer.

Autores dos Relatos:

Denise Ballão, Marina de Fátima Dolata, Alessandra Nacur Gauliki.

Projeto gráfico e diagramação:
Labores Graphici

Iniciando a conversa

Aprofundando o tema

AO CHEGAR À ESCOLA...

Ettiene Cordeiro Guerios
Neila Tonin Agranionih
Tania Teresinha Bruns Zimer

Ao chegar à escola muitos são os conhecimentos trazidos pelas crianças. Movidas pela curiosidade investigativa, em situações como as brincadeiras comuns ao cotidiano infantil, constroem hipóteses próprias sobre quantidade, espaço, tempo, escritas numéricas, bem como se envolvem, ao explorar objetos, em ações que requerem quantificar, comparar, contar, juntar, tirar, repartir, entre outras, na resolução de pequenos problemas de modo prático e também simbólico.

Relações matemáticas com números estão em evidência no cotidiano das pessoas e isso não é diferente quando se trata de crianças. Por exemplo, ao observar um grupo de alunos brincando durante o intervalo das aulas (recreio ou horário do lanche), pode-se constatar que muitas brincadeiras requerem algum tipo de contagem ou quantificação (amarelinha, queimada ou caçador, STOP, esconde-esconde, etc.), e também, possibilitam que estabeleçam relações espaciais e temporais e, em alguns casos, realizem cálculos e resolvam problemas.

Tais atividades contribuem para a construção de esquemas que favorecem o desencadear do processo de compreensão das operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Do mesmo modo, permitem a interação das crianças com diferentes formas de registros simbólicos, tais como números de canais de televisão, números de telefone, preços de mercadorias, placas de carro, o que contribui para a gradativa familiarização com as escritas numéricas e com o sistema de numeração decimal.

É possível constatar, também, modos próprios das crianças lidarem com situações empregando processos cognitivos diversos que estão envolvidos no raciocínio matemático, tais como, o estabelecimento de relações parte-todo, a realização de transformações de uma das partes que compõem o todo, comparações, composição entre quantidades de diferentes grupos, retirada ou inclusão de quantidades em relação a certo grupo, repartições, distribuições e divisão de certa quantidade, combinações e comparações entre objetos em quantidades pré-estabelecidas, entre outras.

Ao chegar à escola, juntamente com a riqueza de conhecimentos possibilitada pelas suas vivências, as crianças trazem o desejo e a urgência de aprender mais, e, em relação à Matemática, tais como, aprender a escrever números "grandes" e "fazer contas".

É fato que, nas escolas, por muito tempo, a ênfase do ensino da Matemática esteve nas técnicas operatórias e na compreensão dos algoritmos em si e pouca atenção foi dada à compreensão dos conceitos matemáticos e às propriedades envolvidas nas operações. Nos dias atuais, não raras vezes, o ensino de técnicas operatórias pouco vincula situações que possam dar sentido aos cálculos e contribuam para o entendimento das operações envolvidas. Esta realidade contribui para que muitas crianças se desmotivem e gradativamente, percam o gosto e o interesse em aprender matemática.

Neste caderno, tratamos de cálculos e operações no Ciclo Inicial da Alfabetização. Ao voltar-se aos cálculos numéricos e as operações matemáticas de adição, subtração, multiplicação e divisão, buscamos fazê-lo de modo integrado aos processos de construção de conceitos que envolvem as operações e seus modos de representação.

Muitas vezes a atividade matemática escolar é organizada apenas em exercícios em que a meta é aprender a realizar cálculos (mentais e escritos) e a operar com algoritmos, de modo a tornar a rotina na sala de aula em intermináveis exercícios sem significado matemático para os alunos.

Algoritmos são procedimentos de cálculo que envolvem técnicas com passos ou sequências determinadas que conduzem a um resultado numérico.

É insuficiente um aluno saber "fazer contas" mecanicamente, se não souber as ideias matemáticas que lhes são pertinentes. Por exemplo, pouco adianta a um aluno saber fazer "conta de mais", em outras palavras, saber desenvolver o algoritmo da adição, se não souber desenvolver estratégias que lhe permita resolver um problema que tenha sido solicitado em sala de aula ou na própria vida fora da escola. Esta prática não é a pretendida no ensino da Matemática.

O uso de algoritmos deve estar associado à compreensão pelos alunos dos significados conceituais nele envolvidos. Por exemplo, a compreensão da adição como operação matemática e também a compreensão dos processos do próprio algoritmo da adição. É necessário considerar que a resolução de um algoritmo pode ser realizada de forma mecânica sem que haja a compreensão dos agrupamentos envolvidos nos processos de cálculo, como o "vai um", por exemplo. Por outro lado, a resolução pode estar fundamentada na compreensão das propriedades do sistema de numeração decimal que sustentam o algoritmo, ou seja, na compreensão dos agrupamentos e reagrupamentos em base dez.

Aprender sobre adição, subtração, multiplicação e divisão requer aprender muito mais do que algoritmos. Mais do que destreza no fazer contas – e habilidade na técnica operatória própria aos algoritmos, espera-se que os alunos compreendam o que fazem e construam os conceitos envolvidos nessas operações, e é neste sentido, que se estabelece, neste caderno, um diálogo com a Resolução de Problemas. Esta perspectiva metodológica contribui significativamente para que a atividade matemática seja desenvolvida de modo a valorizar a compreensão conceitual inerente aos procedimentos de cálculos durante toda a escolaridade e, marcadamente, desde o Ciclo de Alfabetização do Ensino Fundamental.

Durante um bom tempo, problemas matemáticos foram utilizados na sala de aula como uma forma de treinar ou aplicar algoritmos. Estas práticas ainda persistem em muitas escolas. No contexto de formação na área de Matemática do PACTO, entende-se que a Resolução de Problemas deve desencadear a atividade matemática. Uma proposta pedagógica pautada na Resolução de Problemas possibilita que as crianças estabeleçam diferentes tipos de relações entre objetos, ações e eventos a partir do modo de pensar de cada uma, momento em que estabelecem lógicas próprias que devem ser valorizadas pelos professores. A partir delas, os alunos podem significar a atividade algorítmica da resolução e construir ou consolidar conceitos matemáticos pertinentes às soluções.

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais "[...] o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada [...]. (BRASIL, 1997, p. 43). Esta afirmação evidencia que problemas matemáticos em que o aluno não precise pensar matematicamente e desenvolver estratégias de resolução, ou seja, não precise identificar o conceito matemático que o resolve, transforma-se em simples exercício algorítmico, ou seja, em apenas fazer contas.

Mas, o que é, então, um problema matemático?

De acordo com os PCN: "Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la" (BRASIL, 1997, p. 44).

O processo de construção de solução pelo aluno é fundamental para a aprendizagem e dará sentido matemático para os cálculos e operações que efetuará.

CÁLCULOS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA SALA DE AULA

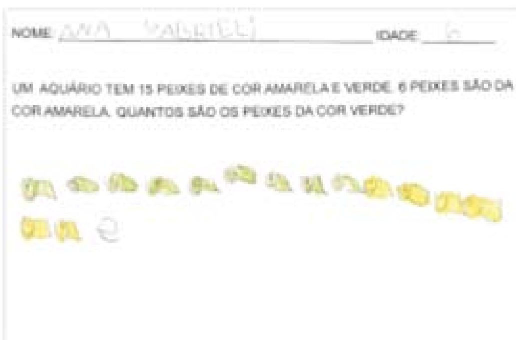
Partindo da possibilidade de situações não conhecidas pelos alunos constituírem-se em problemas e a riqueza da diversidade de estratégias dos alunos, na resolução dos mesmos desencadear a construção de conhecimentos matemáticos, um aspecto fundamental na atividade com resolução de cálculos e problemas em sala de aula é que os professores observem e considerem os modos próprios de resolução e de aprendizagem de cada criança.

Ilustramos essa afirmação apresentando exemplos de estratégias diferentes de alunos para resolução de um problema proposto por uma professora. Observem que as crianças elaboram estratégias e evidenciam o raciocínio que empregam, ao contrário de apenas executarem mecanicamente cálculos previamente indicados para serem feitos, sem compreensão conceitual.

Exemplo

- **Um aquário tem 15 peixes de cor amarela e verde. 6 peixes são da cor amarela. Quantos são os peixes da cor verde?**

Observe as estratégias que as crianças elaboraram para a resolução.



Acervo pessoal

A partir da resolução das crianças é possível perceber as estratégias e aprendizagens de cada uma.

- Ana Gabrielli inicialmente desenhou os 15 peixes em sequência. A seguir, pintou os últimos 6 de amarelo e os restantes de verde. Contou então os peixes verdes e escreveu o resultado 9 ao lado. Observe que Ana Gabrieli espelhou a grafia do 9. Ana Gabrielli resolveu o problema pela contagem da diferença entre os peixes amarelos e os demais e mostra estar aprendendo a grafia dos numerais.
- Anita pintou em cores diferentes os dados do problema, escreveu o valor encontrado ao lado do enunciado, pintou e escreveu a resposta: "9 peixes são verdes". Inicialmente, desenhou os 15 peixes agrupados em duas linhas

com critério aparentemente estético, pintou os seis primeiros de amarelo e os restantes de verde. Ao lado da representação pictórica fez o cálculo usando o algoritmo tradicional da conta armada e fez mais uma representação pictórica com pequenas bolinhas. Anita compôs sua estratégia de resolução utilizando três representações, que nos parecem complementares.

- Maria desenhou os 15 peixes, agrupou os 6 primeiros em um subconjunto, os restantes em outro subconjunto, abaixo, fez o algoritmo tradicional da conta armada da subtração 15 – 6 = 9 e ao lado fez mais uma representação pictórica. Percebe-se que tentou outras estratégias anteriormente, pois há sinais de escritas apagadas que embora não legíveis, evidenciam tentativas de Maria. Na resposta encontramos marca apagada da escrita 24. Faz-nos pensar que em determinado momento Maria encontrou 9 como resultado de suas estratégias, mas, ao elaborar a resposta, continuou efetuando cálculos, sem entender exatamente o que solicitava o enunciado. A resposta 24 apagada pode ser o cálculo da adição do 9 ao 15 presente no enunciado.

O que essas diferentes estratégias permitem considerar?

Os três alunos desenvolveram estratégias diferentes e todas conduziram à resolução correta do problema. Evidenciam movimentos cognitivos diferentes em função de conhecimentos matemáticos mobilizados por cada uma delas. Maria evidencia que está em processo de construção conceitual, mas que necessita atenção, uma vez que pode estar operando com dados numéricos do problema sem ter compreendido a situação presente no problema e, sem saber o que necessita, matematicamente, fazer.

Observe, agora, como Anita realizou a atividade. A professora dela tem uma orientação própria para resolução dos problemas que passa para seus alunos: eles devem colorir os dados e a pergunta do problema para evidenciá-los. É importante salientar que são os alunos que devem identificar quais são esses dados e qual a pergunta do problema e pintá-los adequadamente. Se os professores indicarem previamente quais os dados a serem pintados, ou se pintarem os dados no quadro antes de os alunos os identificarem, o potencial didático da Resolução de Problemas estará comprometido, porque será reduzido ao cálculo das contas envolvidas no enunciado. Lembre que o potencial da atividade está, exatamente, em que os alunos compreendam a situação-problema e elaborem a estratégia de resolução.

Se os alunos compreenderam a situação configurada, então poderão pensar sobre ela e identificar o conhecimento matemático que a resolve. Ana Gabrielli, Anita e Maria, por exemplo, desenvolveram estratégias diferentes para resolver o mesmo problema, mas, mesmo que as estratégias tenham sido diferentes, cada uma a seu modo, chegou à resposta correta.

É possível afirmarmos que as crianças envolvidas na atividade descrita, Ana Gabrielli, Anita e Maria, construíram as ideias matemáticas pertinentes ao problema? Não podemos afirma, categoricamente, que sim. O que podemos afirmar é que as estratégias que realizaram, evidenciam um processo de construção conceitual, nesse caso, das operações matemáticas pertencentes ao campo conceitual aditivo, que será, explorado mais adiante.

A socialização dessas estratégias desenvolvidas pelos alunos é um recurso a mais para que os mesmos percebam as diferentes possibilidades de resolução de um problema. É interessante que os caminhos pensados e construídos para chegar às respostas sejam discutidos pelo grupo de alunos. Por exemplo, na resolução de Maria ao problema apresentado anteriormente, questionar o significado do "9" e do 24, assim como as relações entre "6", "9" e "15" no contexto do problema possibilitará que se apropriem de diferentes procedimentos. Para tal, é importante também promover a reflexão sobre os caminhos percorridos e as respostas obtidas, bem como, valorizar as estratégias realizadas.

É importante que as estratégias individuais sejam estimuladas. São elas que possibilitam aos alunos vivenciarem as situações matemáticas articulando conteúdos, estabelecerem relações de naturezas diferentes e decidirem sobre a estratégia que desenvolverão. A socialização dessas estratégias com toda a turma amplia o repertório dos alunos e auxilia no desenvolvimento de uma atitude mais flexível frente a resolução de problemas.

Em primeiro lugar, é preciso que as crianças compreendam o problema, ou seja, interpretem a situação-problema vivenciada, compreendam o enunciado do problema, seja oral ou escrito. Ao compreenderem, poderão estabelecer relações entre o que a situação propõe pelo enunciado e os conhecimentos matemáticos a ela pertinentes.

Por isso, é importante que os professores dediquem um tempo para a interpretação da situação proposta para ser resolvida. Compreendida a situação proposta, oralmente ou no enunciado do problema, os alunos terão condição de desenvolver as estratégias de resolução. É nesse momento que mobilizarão conceitos matemáticos conhecidos e fundamentarão os que estão em processo de construção conceitual. É o importante momento em que os alunos decidirão COMO resolver. Cabe aqui uma observação: este momento só terá valor didático se, de fato, o aluno mobilizar seu pensamento para a construção da estratégia de resolução. Se os alunos estiverem repetindo procedimentos, ou executando o que lhes for dito para fazer, não estarão desenvolvendo estratégias de resolução. O problema estará se convertendo em exercício de repetição ou em execução algorítmica. Observe-se que, nesses casos, a atividade matemática em si (resolver problema por repetição de procedimento ou por execução do que foi dito para fazer) pode ocorrer; o que pode não acontecer é a compreensão conceitual, pois a atividade matemática assim orientada não permite que ocorra. Por isso, enfatizamos que a Resolução de Problema, ou de situação-problema, possibilita uma aprendizagem matemática conceitual.

Construída a estratégia, o aluno realizará os cálculos, promoverá a solução, chegará à resposta. A realização dos cálculos pode ocorrer de diferentes modos. Pode ser a algorítmica propriamente dita, oral, pictórica, com a utilização de material dourado ou de outro modo que expresse a resolução da estratégia construída.

É interessante que os alunos reflitam sobre a resposta obtida. Os professores devem incentivar os alunos a compararem a resposta obtida com o enunciado do problema, ou com a situação problema que gerou a necessidade de solução. É preciso que argumentem se a resposta obtida faz sentido no contexto do problema. É preciso examinar o sentido matemático da resposta. Nesse momento, se os alunos perceberem inconsistência entre resposta e dados do problema, eles mesmos deverão rever a estratégia.

Nos PCNs encontramos indicações de que trabalhar com problemas observando os aspectos referidos envolve processos de construção de conhecimentos.

> O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos (BRASIL, 1997, p. 45).

A professora da Rede Municipal de Curitiba Alessandra Nacur Gauliki trabalha com Resolução de Problemas em sua prática cotidiana. Ela disponibilizou sua experiência conforme o relato a seguir.

O TRABALHO COM O ENSINO DA MATEMÁTICA

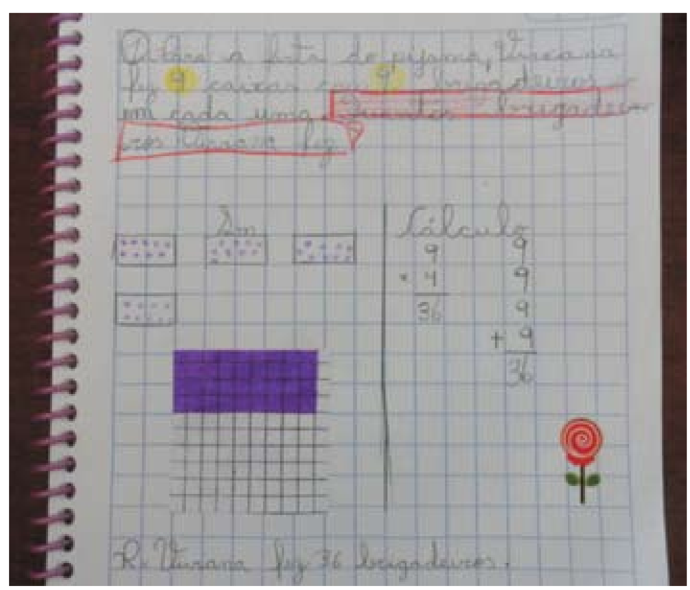
Alessandra Nacur Gauliki

Considerando a importância da Matemática para a vida cotidiana e acadêmica, o estudo dessa área do conhecimento deve ser instigante e desafiador e possibilitar ao estudante a criação de suas próprias estratégias de resolução de problemas ou execução de exercícios que envolvam o raciocínio lógico-matemático. Trabalhar com a matemática engloba, antes de tudo, proporcionar ao estudante a possibilidade de resolver situações desafiadoras e utilizar estratégias e mecanismos que favoreçam essas ações.

A prática de sala de aula requer, que nós professores, sejamos conhecedores da gênese do que queremos ensinar. As perguntas norteadoras que ajudam nesse processo são: O que vou ensinar? Para que vou ensinar? Como vou ensinar e por que vou ensinar? Precisamos saber a que objetivo pretendemos chegar ou atingir com determinado conteúdo de ensino. Diante desse pressuposto, faz-se necessário tornar essa prática permeada de significação para que a aprendizagem aconteça de forma efetiva.

Quando trabalho com uma situação-problema, por exemplo, proporciono às crianças, primeiramente, um momento para que haja uma efetiva interpretação do que está sendo solicitado; questiono quais são os dados que temos no problema (peço até para contornarem esses dados com cores diferenciadas, valores numéricos de uma cor, pergunta de outra cor e assim por diante); quais hipóteses posso abstrair para resolver o problema; como, de que forma vou resolvê-lo (com desenhos, dividir o problema em partes para facilitar o desenvolvimento das ações) e por fim a execução do algoritmo e os cálculos necessários. Em problemas de análise combinatória, se faz necessário levar para a sala de aula os elementos que o compõem, mostrando às crianças as diversas possibilidades de combinações que podem ser compostas, de forma que possam visualizar e manipular os dados do problema e posteriormente fazer todos os registros necessários.

Veja este exemplo de problema multiplicativo, envolvendo a ideia aditiva e multiplicativa: 1º passo) Fizemos a leitura e interpretação do problema; 2º passo) Pintamos os algarismos numéricos de uma cor e a pergunta do problema de outra; 3º passo) Desenvolvemos a estratégia que elaboramos, primeiro com o material dourado e após o registro com desenho; 4º passo) Pintamos na malha quadriculada as quantidades obtidas com a manipulação do material dourado; 5º passo) Realizamos os cálculos envolvendo a ideia aditiva e multiplicativa; 6º passo) Voltamos à parte grifada em vermelho, perguntamos aos estudantes o que estava sendo questionado e desenvolvemos a resposta.



Acervo pessoal

Procuro realizar o ensino da matemática, na medida do possível, de forma interdisciplinar, onde delimito um tema a ser abordado e desenvolvo uma sequência didática que contemple entre outras, a área da matemática, não esquecendo no entanto, o objeto de estudo de cada área do conhecimento. Percebo assim, que os estudantes estabelecem uma melhor compreensão e assimilação do conteúdo abordado.

Aos estudantes que apresentam dificuldades de aprendizagem em matemática, torna-se imprescindível um trabalho diferenciado, que proporcione ao educando a manipulação de material concreto, como: material dourado, réguas numéricas, problemas esquematizados em partes, entre outros, com o objetivo de se atingir a curiosidade e a motivação, para que a criança consiga formar seus esquemas de representação mental para posteriormente promover a consolidação do conhecimento. Ao professor também é necessário conhecer em que etapa de desenvolvimento cognitivo encontra-se o seu aluno, para que dessa forma, possa lhe proporcionar atividades condizentes com sua real possibilidade de compreensão. Ou seja, quando uma criança apresenta uma dificuldade em Matemática, temos que "desenrolar o novelo", para sabermos exatamente onde está o fio da meada, devo saber onde se encontra a sua dificuldade e partir daquele ponto para posteriormente ajudá-la em sua superação.

No relato da Professora Alessandra, observamos como ela organiza a atividade com Resolução de Problemas. A compreensão pelos alunos da situação-problema é evidente, como também é evidente que a prática por ela adotada privilegia a construção das estratégias de resolução e a análise do resultado obtido. Vamos, a seguir, abordar aspectos importantes no trabalho com Resolução de Problemas.

ANÁLISE DE ESTRATÉGIAS QUE LEVAM A ERROS

Até aqui abordamos estratégias que conduzem a respostas corretas pelos alunos. E o que fazer diante de estratégias que conduzem a erros?

Há várias situações que dificultam a construção de estratégias resolutivas e que, consequentemente, conduzem os alunos a erros. Citamos aqui erros de duas naturezas: os decorrentes de dificuldades linguísticas e os decorrentes de compreensão de natureza matemática.

As de natureza linguísticas são as dificuldades de compreensão de textos, considerando que o enunciado dos problemas é um texto, seja ele apresentado de modo oral ou escrito. As de natureza matemática são as decorrentes de limitações na compreensão de conceitos envolvidos impedindo o estabelecimento das relações necessárias para a solução do problema.

Guérios e Ligeski (2013) desenvolveram pesquisa com alunos do Ensino Fundamental em atividades com Resolução de Problemas e identificaram os seguintes fatores que levam os alunos a erros, entre outros:

- *Ausência de compreensão ou compreensão inadequada na leitura*: o aluno não compreendeu o que leu e, consequentemente, não identificou uma situação a ser resolvida matematicamente, ou seja, não pode desenvolver estratégia alguma de resolução;
- *Ausência ou equívoco de compreensão matemática*: o aluno compreendeu o que leu mas não identificou o conceito matemático que o resolve.

Embora as autoras tenham identificado tais dificuldades em situação de leitura, esclarecemos que a mesma não ocorre apenas da leitura feita pelo aluno, pois muitas vezes a dificuldade persiste mesmo quando o enunciado é lido para o aluno.

Devemos observar atentamente se os alunos estão compreendendo os problemas e/ou seus enunciados. É imperativo que compreendam, porque é a partir dessa compreensão que haverá atividade matemática. Erros que equivocadamente são considerados dificuldades de aprendizagem em Matemática, algumas vezes, tem sua origem na falta de compreensão do problema ou do seu enunciado. Por isso é importante que os professores analisem a origem dos erros dos alunos para poder ajudá-los na aprendizagem.

As pesquisadoras identificaram uma terceira situação não caracterizada por ausência de compreensão, mas pela evidência de que o aluno está em processo de construção conceitual ao realizar tentativas de resolução testando diferentes caminhos. No caso de Maria, comentado anteriormente, percebe-se que errou para acertar.

Analisar as tentativas ajuda a compreender como as crianças aprendem, como elaboram suas estratégias, qual seu ritmo de aprendizagem e, principalmente, como está acontecendo a base estruturante do pensamento matemático dos alunos.

Erros de compreensão do contexto delineado pelo problema ocorrem e são bastante comuns. Nestes casos, deve-se retornar à busca de sentido da situação. Devemos atentar para verificar o que os alunos erraram. Isto pode ser ocasionado por um erro de cálculo, uma distração, ausência de compreensão ou compreensão equivocada tanto do enunciado como do conhecimento matemático a ele pertinente para a solução. Para cada uma das possibilidades há estratégias diferenciadas de intervenção pedagógica.

De fato, os processos resolutivos das crianças dizem muito sobre como estão aprendendo e a resolução de problemas e de situações-problema possibilitam ao professor identificar se respostas numéricas obtidas representam aprendizagem efetiva.

Devemos também ficar atentos quando as crianças se valem de *indícios linguísticos* presentes nos problemas para realizar cálculos que conduzam à solução. Por exemplo, considere o problema a seguir:

- **Ana tem 5 doces e Maria tem 8 doces. Quantos doces Maria tem a mais?**

Se diante desse problema adicionarem 5 + 8 = 13, induzidos pela palavra “mais” presente no enunciado, temos um forte indício de que não compreenderam conceitualmente as operações necessárias para resolvê-lo.

Podem, também, ao terem sido expostas a um ensino baseado em palavras-chaves relacionadas com operações (mais, juntar, ganhar, etc. implicam em contas de adição, assim como tirar, perder, etc. implicam em contas de subtração), simplesmente terem deduzido se tratar de uma adição. É preciso que sejam exploradas as respostas dos alunos, identificando como pensaram para podermos encontrar circunstâncias reveladoras do processo de aprendizagem de cada um.

OPERAÇÕES E CÁLCULOS NO CICLO INICIAL DO ENSINO FUNDAMENTAL

É bastante comum que as crianças e também adultos relacionem aprender Matemática com aprender a fazer contas uma vez que por muito tempo o ensino de cálculos foi enfatizado no ciclo inicial do Ensino Fundamental. Por conta disso, muitas crianças desenvolveram e desenvolvem habilidades algorítmicas, nessa fase da escolarização, muito mais do que habilidades de resolução de problemas.

Professor, que conta tem que fazer? É de mais ou de menos?
É de vezes ou de dividir?

Perguntas como essas são bastante comuns na prática cotidiana de muitos professores. Se os alunos perguntam recorrentemente que contas devem fazer diante de problemas matemáticos, possivelmente não estão compreendendo as operações envolvidas no problema e/ou não atribuem significado aos algoritmos que sabem fazer. Para aprender matemática precisam saber mais do que fazer contas: é importante saber o que os cálculos significam e compreender os conceitos envolvidos nas operações que representam. Exemplo disso, é o fato de que um mesmo cálculo pode ser realizado para resolver diferentes problemas, como pode ser observado a seguir:

- **Em um vaso há 3 rosas amarelas e 5 rosas vermelhas. Quantas flores há no vaso?**

  $$3 + 5 = 8$$

  Resposta: no vaso há 8 flores.

- **Luísa tinha alguns lápis de cor em seu estojo. Perdeu 3 lápis de cor durante a aula de artes e ficou com 5. Quantos lápis de cor Luisa tinha em seu estojo no início da aula de artes?**

  $$3 + 5 = 8$$

  Resposta: Luísa tinha em seu estojo 8 lápis de cor.

O primeiro problema é facilmente resolvido pelas crianças. Já o segundo envolve um raciocínio mais complexo, a compreensão da adição como operação inversa da subtração, tornando-se mais difícil para as crianças, mesmo que consigam realizar com tranquilidade o cálculo numérico $3 + 5 = 8$. Ou seja, saber fazer a conta não é suficiente, é necessário compreender a operação envolvida no problema. É necessário construir os conceitos envolvidos nas operações.

Vergnaud (2009) afirma que conceitos não podem ser compreendidos de modo isolado, mas sim a partir de campos conceituais. Isto implica em considerar que conceitos, como por exemplo, de adição e subtração, envolvem e são envolvidos por situações, estruturas, operações de pensamento e representação que relacionam-se entre si. Assim, adição e subtração fazem parte de um mesmo campo conceitual denominado aditivo. Do mesmo modo, multiplicação e divisão fazem parte do campo conceitual denominado multiplicativo.

Apresentamos uma proposta de trabalho com cálculos e operações que contemple a construção de conceitos a partir de campos conceituais, partindo de situações que promovem o pensamento operatório e suas diferentes formas de representação.

SITUAÇÕES ADITIVAS

A vivência trazida pela criança no início do processo de escolarização não é pequena e, acrescentamos, não deve ser ignorada. Trata-se de uma riqueza a ser considerada e explorada no processo de alfabetização matemática. Ao ingressar na escola, as crianças já conseguem resolver problemas que envolvem situações aditivas simples, coordenando ações de "juntar", "ganhar" e "perder", por exemplo, com ou sem auxílio de objetos ou registros escritos, uma vez que são as primeiras representações que as crianças formam sobre adição e subtração, antes mesmo de ir para a escola, nas brincadeiras, na interação com outros, enfim, nas relações que estabelecem no seu dia a dia (MAGINA et al., 2001; NUNES; BRYANT, 1997). Por outro lado, a coordenação dessas ações com a **contagem**, constitui um procedimento bastante eficaz na resolução de situações-problema, e merece uma atenção especial no início da escolarização.

A atividade de contagem permite que as crianças construam estratégias que lhes possibilitam resolver problemas de complexidade crescente. Mas, para tanto, conforme Orrantia (2004), há necessidade de desenvolver algumas habilidades, dentre elas:

- começar a contagem a partir de qualquer ponto arbitrário da série numérica, por exemplo, contar a partir do 6;
- identificar o último objeto contado como o cardinal que expressa a quantidade total sem necessidade de contar os objetos novamente;
- estender a contagem iniciada no primeiro conjunto ao segundo conjunto de tal forma que o **primeiro** objeto deste, seja considerado o número seguinte na sequência de contagem, por exemplo: na soma de um conjunto de 3 lápis com um outro de 4 lápis, a contagem se daria da seguinte maneira: 1, 2, 3 seguida por **4**, 5, 6, 7.

Com o tempo, e à medida que interagem com diferentes situações, desenvolvem estratégias de contagem mais sofisticadas, abstratas e eficientes, tais como as necessárias para a resolução de problemas aditivos (FAYOL, 1996; ORRANTIA, 2004). Essas estratégias são identificadas como:

- contar todos;
- contar a partir do primeiro (reter o 5 na memória em 5 + 6, contando os restantes: 6, 7, 8, 9, 10, 11), por exemplo);
- contar a partir do maior (reter o 6 em 5 + 6, contando os restantes: 7, 8, 9, 10, 11);
- usar fatos derivados (em 5 + 6, efetuar o cálculo 5 + 5 = 10 + 1 = 11;
- recuperar fatos básicos da memória (lembrar fatos memorizados, como a tabuada).

A escolarização contribui, ou deveria contribuir, para o uso de estratégias mais maduras em relação à contagem, tais como, fatos derivados e recuperação de fatos da memória, na resolução de problemas e na realização de cálculos.

Por volta dos 5 anos, as crianças conseguem resolver problemas, tais como, os que envolvem as situações de composição e de transformação simples pela contagem que veremos a seguir.

Situações de composição simples

As *situações de composição* relacionam as partes que compõem um todo por ações de juntar ou separar as partes para obter o todo sem promover transformação em nenhuma das partes.

Exemplo

- **Em um vaso há 5 rosas amarelas e 3 rosas vermelhas. Quantas rosas há ao todo no vaso?**

Os números referem-se a dois conjuntos de rosas que se compõem formando o total de rosas no vaso. Não há transformação na situação, uma vez que não houve acréscimo de rosas e nenhuma rosa foi retirada do vaso, mas a ação de “juntar” as partes para determinar o todo.

A criança poderá pegar 5 objetos, representando as 5 rosas, contando-os um a um (1, 2, 3, 4, 5) depois 3 objetos, também contando-os um a um (1, 2, 3). A seguir, juntá-los e contar todos novamente iniciando do 1 até o 8. Esse procedimento é descrito na literatura como “contar todos”.

Problemas de composição podem ser trabalhados a partir de jogos didáticos que possibilitem às crianças coordenar ações próprias às situações aditivas e subtrativas. Veja o jogo a seguir.

JOGO 1 – Comprando fichas

Comprando Fichas

Materiais:

Dois dados, de cores diferentes, adaptados com as faces: 1, 2, 3, 1, 2, 3;

6 fichas na cor correspondente a um dos dados;

6 fichas na cor correspondente ao outro dado;

Número de jogadores: 2

Regras do jogo:

O jogador, na sua vez, lança os dois dados e a seguir "compra" a quantidade de fichas, na cor correspondente a cada dado. Após a compra das fichas, calcula o total de fichas compradas, somando-as. Registra o total de cada rodada na tabela de pontos. O ganhador é aquele que ao final de três rodadas "comprou" o menor número de fichas.

RODADAS	PONTOS	PONTOS	TOTAL
	DADO VERMELHO	DADO AZUL	
PRIMEIRA			
SEGUNDA			
TERCEIRA			
			TOTAL: ....

Problematizar situações do jogo é uma forma bastante interessante para desafiar os alunos a refletir sobre as estratégias e os cálculos realizados bem como suas diferentes formas de representação. Por exemplo:

Problematizando situações após o jogo Comprando Fichas:

1. Veja as fichas que Ana comprou na primeira rodada e descubra o número que caiu no outro dado.

Não é possível.

Ana com 8 fichas.

2. João jogou os dados e comprou 6 fichas. Descubra o número que caiu no outro dado.

Situações de transformação simples

As *situações de transformação* envolvem um estado inicial, uma transformação por ganho ou perda, acréscimo ou decréscimo e um estado final.

As situações mais simples de transformação são aquelas em que o estado inicial e a transformação são conhecidos e o estado final deve ser determinado.

Exemplo:

- **Aninha tem 3 pacotes de figurinhas. Ganhou 4 pacotes da sua avó. Quantos pacotes tem agora?**
  – Estado inicial: 3 pacotes de figurinhas.
  – Transformação: ganhou 4 pacotes.
  – Estado final: ?

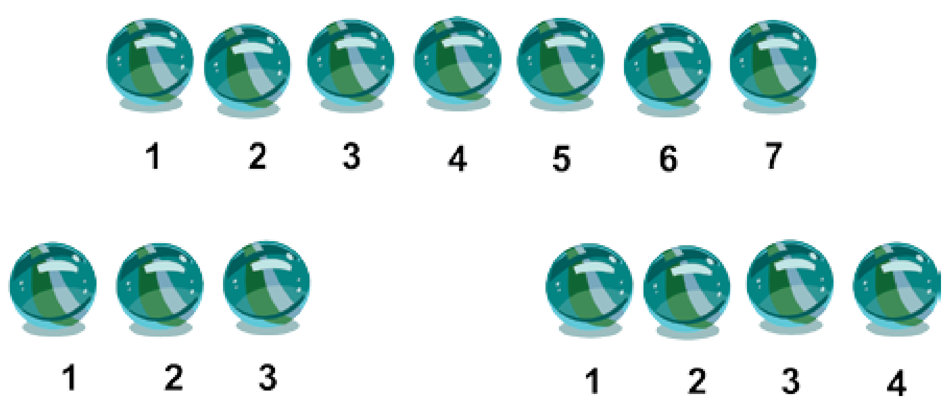
A criança poderá pegar 3 objetos, representando os 3 pacotes (estado inicial), contando-os um a um (1, 2, 3) depois 4 objetos, também contando-os um a um (1, 2, 3, 4). A seguir, juntá-los (transformação) e contar todos novamente iniciando do 1 até o 7, obtendo o estado final 7.

Também poderia pegar 3 pacotes de figurinhas e continuar pegando mais 4 pacotes, um a um, continuando a contagem até 7. Esse procedimento é conhecido como "contar na sequência".

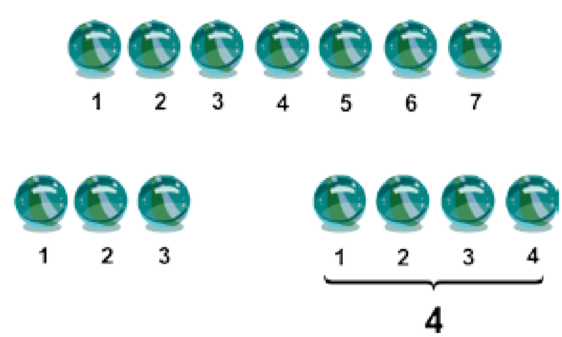
Problemas de subtração também podem envolver situações de transformação simples e podem ser resolvidos a partir da coordenação das ações de retirar e contar.

Exemplo:

- **Zeca tinha 7 bolinhas de gude. Deu 3 para Luís. Quantas ele tem agora?**
  – Estado inicial: 7 bolinhas
  – Transformação: deu 3 bolinhas
  – Estado final:?



As crianças podem resolver o problema da seguinte maneira: contar 7 bolinhas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) (estado inicial). Deste conjunto, contar 3 bolinhas e separá-las das demais (transformação). Contar as bolinhas restantes, reiniciando a contagem (1, 2, 3, 4), obtendo o estado final 4.



Inicialmente as crianças desenvolvem esquemas de "juntar"; "separar" e "correspondência um a um" independentemente uns dos outros. Isso lhes permite dar conta de situações mais simples. No entanto, o avanço no processo de compreensão das relações aditivas envolve coordenar estes esquemas reconhecendo a relação inversa que existe entre adição e subtração, e, numa fase posterior, coordená-los com a correspondência um a um. (NUNES et al, 2005).

Situações de transformação, por exemplo, podem envolver relações inversas entre o todo e suas partes, tornando-se mais difíceis, mesmo com o auxílio de objetos. Situações de comparação podem envolver correspondência um a um, o que também as torna mais complexas. A maioria das crianças ao entrar na escola não desenvolveu meios de coordenar esses esquemas. Cabe à escola ajudá-las.

> Se desejamos promover o desenvolvimento conceitual das crianças em adição/subtração, devemos ajudá-las a estabelecer uma conexão entre duas coisas que elas já conhecem. Elas já sabem como comparar usando correspondência termo a termo e elas já têm um conceito de adição/subtração relacionado a situações de transformação. Se elas podem coordenar estes dois itens de conhecimento, sua compreensão de adição/subtração se tornará muito mais poderosa. (NUNES; BRYANT, 1997, p. 137)

A seguir apresentamos alguns exemplos dessas situações mais complexas de adição e subtração.

Situações de composição com uma das partes desconhecida

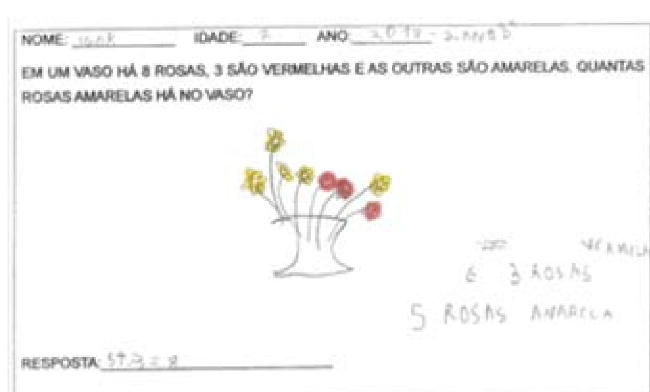
Problemas de composição podem envolver situações em que o todo e uma das partes são conhecidos, sendo necessário determinar a outra parte. No exemplo que segue a situação envolve subtrair uma parte do todo para obter a outra parte, sem alterar as quantidades.

Exemplo:

- **Em um vaso há 8 rosas, 3 são vermelhas e as outras são amarelas. Quantas rosas amarelas há no vaso?**
  - Todo: 8 rosas
  - Parte conhecida: 3 rosas vermelhas
  - Parte desconhecida: ?

A resolução pode ser realizada por um processo simples como fez Igor: desenhou o vaso com 3 rosas vermelhas e a seguir foi desenhando rosas amarelas até completar 8 rosas no vaso, representando o que fez com o cálculo:

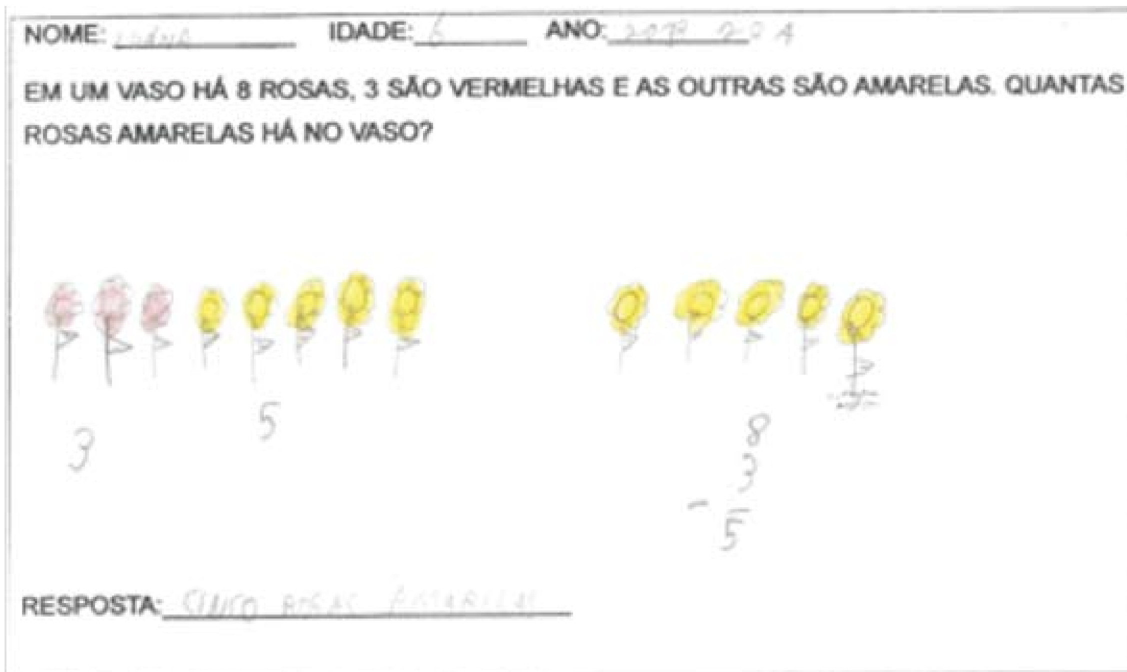
$$5 + 3 = 8.$$



Acervo pessoal

Dentre os procedimentos adotados para a resolução, a criança também pode, após contar oito objetos, separar os que correspondem às rosas vermelhas e contar os restantes: 1, 2, 3, 4, 5, concluindo que há 5 rosas amarelas no vaso, ou seja, subtrair a parte conhecida (3) do todo (8), obtendo a parte desconhecida (5).

Luana, em seu registro, evidencia ter desenvolvido raciocínios mais complexos. Inicialmente, ela desenhou o todo (8 rosas). Pintou 3 rosas de vermelho (parte conhecida) e escreveu o número 3. A seguir, pintou as restantes de amarelo e escreveu o número 5. Fez a conta da subtração (8 – 3 = 5), representando o resultado por meio de um novo desenho.


NOME: Luana IDADE: 6 ANO:

EM UM VASO HÁ 8 ROSAS, 3 SÃO VERMELHAS E AS OUTRAS SÃO AMARELAS. QUANTAS ROSAS AMARELAS HÁ NO VASO?

3 5

8
– 3
5

RESPOSTA: cinco rosas amarelas

Acervo pessoal

O procedimento realizado por Luana evidencia o uso da operação inversa na resolução do problema aditivo e a representação da mesma por meio do cálculo da subtração.

Situações de transformação com transformação desconhecida

Trata-se de problemas aditivos de transformação desconhecida, uma vez que são conhecidos os estados iniciais e o estado final da situação.

Exemplo:

- **Aninha tinha 5 bombons. Ganhou mais alguns bombons de Júlia. Agora Aninha tem 8 bombons. Quantos bombons Aninha ganhou?**
  - – Estado inicial: 5 bombons
  - – Transformação: ?
  - – Estado final: 8 bombons

A contagem poderia ser um recurso para a resolução de problemas com transformação desconhecida, tanto envolvendo a estratégia de "contar todos" como a de "contar na sequência". Outro modo de resolver o problema envolveria a compreensão e a aplicação da subtração como operação inversa da adição. Trata-se de acrescentar a uma quantidade inicial conhecida uma quantidade desconhecida, para obter um total também conhecido, ou seja, 5 + ? = 8. A operação envolvida é a adição, mas a resolução do problema requer ações próprias da subtração, ou seja, subtrair 5 do estado final 8.

Problemas de subtração também podem envolver transformações desconhecidas.

Exemplo:

- **Zeca tinha 8 bombons. Deu alguns bombons para Luís e ficou com 3. Quantos bombons Zeca deu para Luís?**
  - – Estado inicial: 8 bombons
  - – Transformação: ?
  - – Estado final: 3 bombons

A operação envolvida na situação é 8 - ? = 3. Ou seja, envolve saber quanto deve ser retirado de 8 para obter 3. O problema pode ser resolvido de diferentes formas. As crianças poderiam contar 8 bombons, desses, separar os 3 que ficaram com Zeca e contar os restantes, obtendo o resultado, assemelhando-se ao processo de resolução de problemas de transformação simples, conforme indica o desenho de Marcela:

No entanto, Marcela, induzida pelos aspectos linguísticos presentes no problema (“deu”), subtrai 3 de 8 bombons, obtendo o resultado (8 – 3 = 5), não percebendo que o 3 indica a quantidade de bombons que Zeca “ficou” e não a quantidade de bombons que “deu” para Luís. A operação envolvida nesse raciocínio seria 8 – 5 = 3, uma vez que o 5 corresponde à transformação desconhecida.

Acervo pessoal

Outro modo de resolver o problema envolve a operação inversa: quanto devo acrescentar ao três para obter 8, ou seja $3 + ... = 8$. Nesse caso, a criança poderia contar 3 objetos e juntá-los num único grupo, a partir daí seguir contando até chegar a 8 objetos.

Situações de transformação com estado inicial desconhecido

O estado inicial também pode ser desconhecido nas situações de transformação. Esses problemas costumam ser mais difíceis para as crianças, pois envolvem operações de pensamento mais complexas.

Exemplo:

- **Maria tinha algumas figurinhas. Isa lhe deu mais 4. Agora Maria tem 7 figurinhas. Quantas figurinhas Maria tinha?**

  – Estado inicial: ?

  – Transformação: deu 4 figurinhas

  – Estado final: tem 7 figurinhas

Para resolver o problema, as crianças poderiam, por tentativas, somar 4 a algumas quantidades. Por exemplo, se somassem 1 ao 4, não obteriam 7, se somassem 2, também não, mas se somassem 3 obteriam 7, concluindo que o resultado do problema é 3.

Também poderiam pensar que "somar um pouco a 4 é o mesmo que somar 4 a um pouco" e dessa forma resolver o problema por estratégias semelhantes às discutidas nos problemas de transformação desconhecida. Essa forma de resolver o problema envolve a compreensão da propriedade comutativa da adição.

> A propriedade comutativa da adição é definida por "$a + b = b + a$", ou seja, a ordem das parcelas não altera a soma. Por exemplo, $3 + 4 = 4 + 3$.

Também podemos ter problemas de subtração envolvendo início desconhecido. Por exemplo:

- **Paulo tinha alguns carrinhos. Deu 4 carrinhos para Pedro e ficou com 7. Quantos carrinhos Paulo tinha?**

  – Estado inicial: ?

  – Transformação: deu 4 carrinhos.

  – Estado final: ficou com 7 carrinhos.

A resolução do problema pela inversão pode ser influenciada pela palavra "deu", que sugere subtração. Se as crianças se deixarem influenciar pelos indícios linguísticos, certamente chegarão a resultados incorretos, tanto em problemas de adição como de subtração com início desconhecido. Uma solução possível envolveria a operação inversa no sentido de acrescentar aos carrinhos que ficaram com Paulo os carrinhos que ele deu para Pedro (7 + 4 = 11).

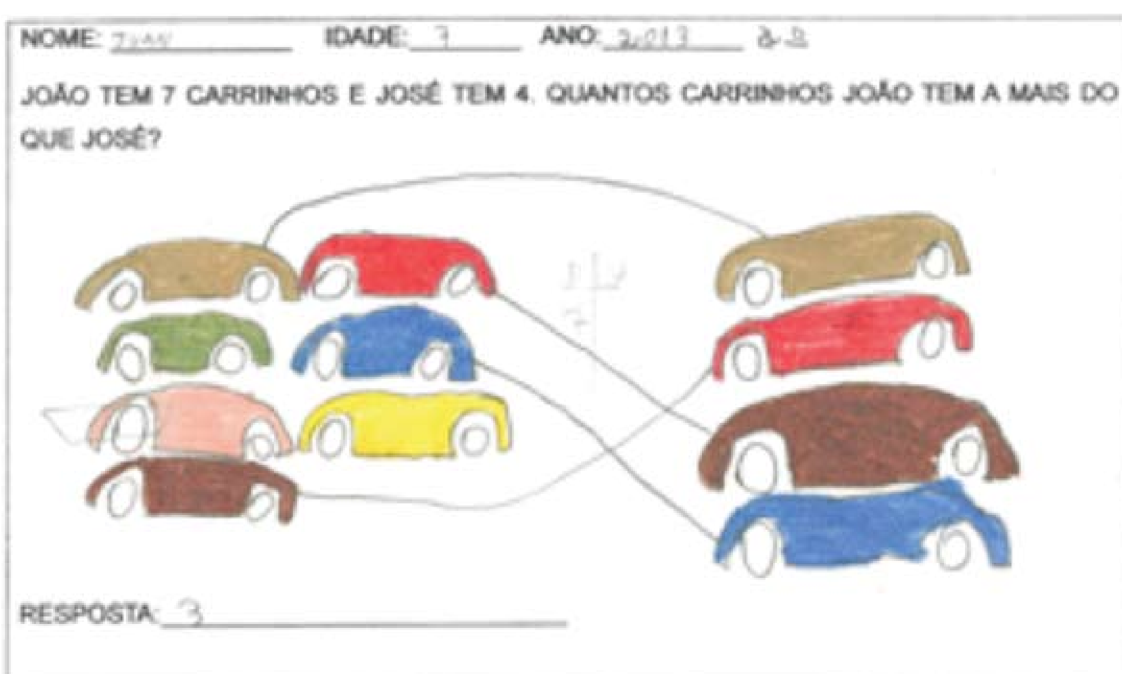
Situações de comparação

Nas situações de comparação não há transformação, uma vez que nada é tirado ou acrescentado ao todo ou às partes, mas uma relação de comparação entre as quantidades envolvidas.

- **João tem 7 carrinhos e José tem 4 carrinhos. Quem tem mais carrinhos?**
- **João tem 7 carrinhos e José tem 4 carrinhos. Quantos carrinhos João tem a mais do que José?**

Problemas como o do primeiro exemplo são resolvidos de modo intuitivo por crianças desde bem pequenas. Já o segundo, possui um grau maior de dificuldade, uma vez que a operação que conduz à solução não está explícita no enunciado do problema.

Juan, no exemplo seguinte, usou a correspondência um a um para resolver o segundo problema. Desenhou os carrinhos de João e os carrinhos de José. A seguir fez corresponder um carrinho de João com um de José, verificando que restaram 3 carrinhos sem correspondência.



Acervo pessoal

Já Arthur, usou o mesmo esquema, mas utilizando risquinhos. Para evidenciar os risquinhos que correspondiam ao que João tinha a mais, utilizou o sinal de + e continuou fazendo correspondência um a um entre os risquinhos de João e José, verificando que foram necessários 3 risquinhos a mais.


NOME: IDADE: ANO:

JOÃO TEM 7 CARRINHOS E JOSÉ TEM 4. QUANTOS CARRINHOS JOÃO TEM A MAIS DO QUE JOSÉ?

RESPOSTA: 3

Acervo pessoal

Arthur utiliza uma forma de representação diferenciada de Juan. No primeiro registro, a criança utiliza uma forma de representação pictográfica, a qual corresponde ao contexto e ao objeto envolvido na situação problema. Já no segundo registro, a criança utiliza uma forma de representação simbólica, demonstrando evolução em relação ao conhecimento de diferentes formas de representação.

Nunes et. al. (2005), sugerem que uma boa estratégia para ajudar as crianças a pensar sobre “quantos tem a mais” é solicitar que relacionem os números envolvidos no problema a partir de uma ação, reformulando a pergunta do problema, por exemplo: quantos carrinhos temos que dar a José para que ele fique com a mesma quantidade de João? Pensando dessa forma o problema se torna semelhante a um problema de transformação desconhecida: $4 + ? = 7$, tornando-se mais fácil de ser resolvido por envolver uma informação mais precisa em relação à ação a ser realizada.

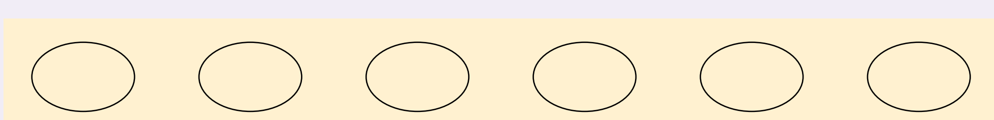
Jogos matemáticos em que as crianças necessitem coordenar o que já sabem sobre adição, subtração e correspondência um a um podem ser benéficos para a compreensão de problemas de comparação. Por exemplo:

Quantos faltam para seis?

Quantos faltam para seis?

Materiais:

- 4 cartelas, conforme o modelo:



- 1 dado azul
- 24 fichas azuis e 24 amarelas

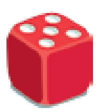
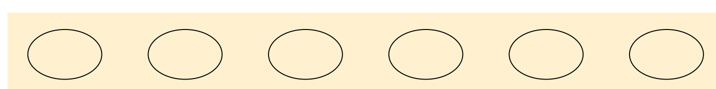
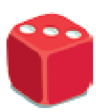
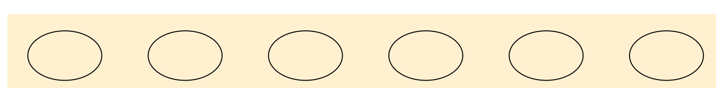
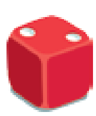
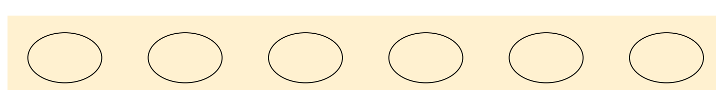
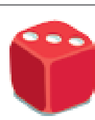
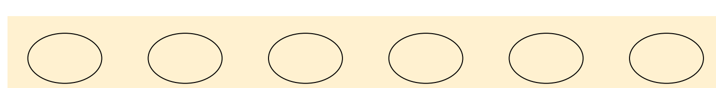
Número de jogadores: 4

Regras do jogo:

Cada jogador pega uma cartela, 6 fichas azuis e 6 fichas amarelas. O dado indica quantas fichas azuis devem ser colocadas na cartela a cada jogada. As fichas amarelas devem ser usadas para preencher os espaços restantes da cartela. O primeiro jogador lança o dado e preenche a cartela com o número de fichas azuis correspondentes ao número que caiu no dado. A seguir completa a cartela com as fichas amarelas. O número de fichas amarelas necessário corresponde à sua pontuação na rodada. Se no dado cair 6, toda a cartela deverá ser preenchida com as fichas azuis e o jogador não marcará ponto. Ganha a rodada quem completar a cartela com o maior número de fichas amarelas.

Jogo adaptado de: RANGEL, A. C. S. **Educação Matemática e a construção do número pela criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992

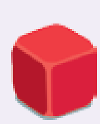
Problematizando situações após o jogo:

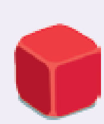
Exemplo: 1 Preencha as cartelas dos jogadores. Quem ganhou a rodada?		
João		
Luís		
Ana		
Maria		
Resposta:		

Exemplo 2

Maria fez 2 pontos na primeira rodada e nas outras duas não fez nenhum ponto. Que números caíram nos dados jogados por Maria?

1ª rodada: 

2ª rodada: 

3ª rodada: 

Jogos de percurso também podem ser uma excelente oportunidade para problematizar situações aditivas com as crianças uma vez que permitem a resolução de problemas pela contagem de casas. Veja o jogo a seguir.

Corrida dos carrinhos

Corrida dos carrinhos

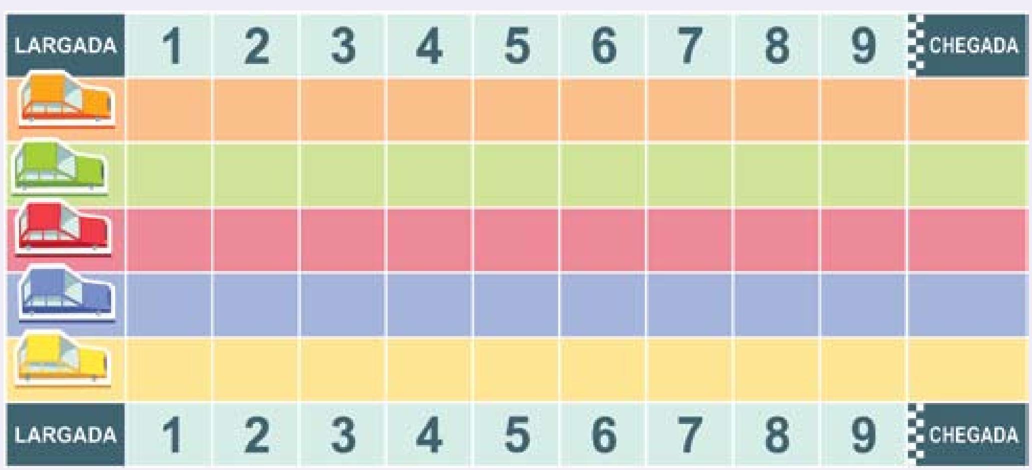
Materiais:

- 1 dado adaptado com as faces: 1, 2, 3, 1, 2, 3;
- 1 carrinho (peão) para cada jogador.

Número de jogadores: 5

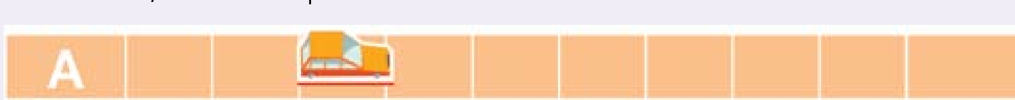
Regras do jogo:

Cada jogador escolhe uma pista e um carrinho (peão), colocando-o na casa da Largada. O jogo inicia com o primeiro jogador lançando o dado e avançando o número de casas sorteado no dado. O peão que primeiro atingir o final da pista, casa da chegada, é o vencedor do jogo.

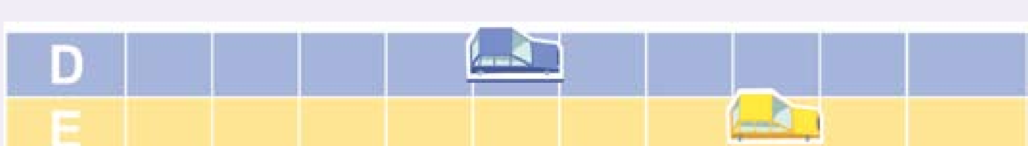


Problematizando situações após o jogo:

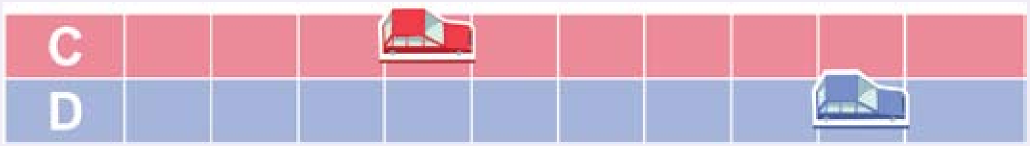
1. O carrinho de Maria está na casa 3. Quantas casas faltam para que chegue na casa 10, ao final da pista?



2. O carrinho de João está na casa 5 e o carrinho de José na casa 8. Quantas casas João está atrás de José?



3. Luís está na casa 4 e João está na casa 9. Quantas casas João andou a mais do que Luís?



4. Luís jogou o dado e avançou para a casa 8. Em qual casa ele estava se no dado caiu 4?

5. O carrinho de Ana estava na casa 4. Luís jogou o dado e andou 5 casas, ultrapassando Ana em 2 casas. Em qual casa Luís estava antes de lançar o dado?

Obs. É recomendável que também sejam propostos problemas sem o apoio visual do tabuleiro, como esse último, para que as crianças trabalhem com diferentes formas de representação da situação.

SITUAÇÕES MULTIPLICATIVAS

Reflita a respeito da seguinte questão: Se um aluno efetua corretamente um algoritmo, uma conta de multiplicar ou de dividir significa que ele aprendeu a multiplicação ou a divisão?

Se a resposta a esse questionamento for positiva e estiver pautada exclusivamente na concepção de que multiplicar ou dividir é fazer as contas de forma correta, temos aí evidências de redução destas operações a cálculos e à aplicação de procedimentos. Entretanto, se a resposta a esse questionamento for negativa, podemos considerar o entendimento destas operações (multiplicação e divisão) como formas de organização do pensamento a partir das estruturas e conceitos matemáticos específicos de um determinado raciocínio, no caso, do raciocínio multiplicativo.

O raciocínio multiplicativo é diferente do raciocínio aditivo, e é importante conhecermos e diferenciarmos as características de cada um. Para isso, nos fundamentaremos nos estudos de Nunes e Bryant (1997), Nunes et al.(2005) e Correa e Spinillo (2004).

- Raciocínio aditivo: envolve relações entre as partes e o todo, ou seja, ao somar as partes encontramos o todo, ao subtrair uma parte do todo encontramos a outra parte. Envolve ações de juntar, separar e corresponder um a um.

- Raciocínio multiplicativo: envolve relações fixas entre variáveis, por exemplo, entre quantidades ou grandezas. Busca um valor numa variável que corresponda a um valor em outra variável. Envolve ações de correspondência um para muitos, distribuição e divisão.

O raciocínio multiplicativo envolve a multiplicação e a divisão com diferentes complexidades. É possível observar nos problemas apresentados a seguir como o raciocínio é desenvolvido tanto em relação à multiplicação quanto em relação à divisão.

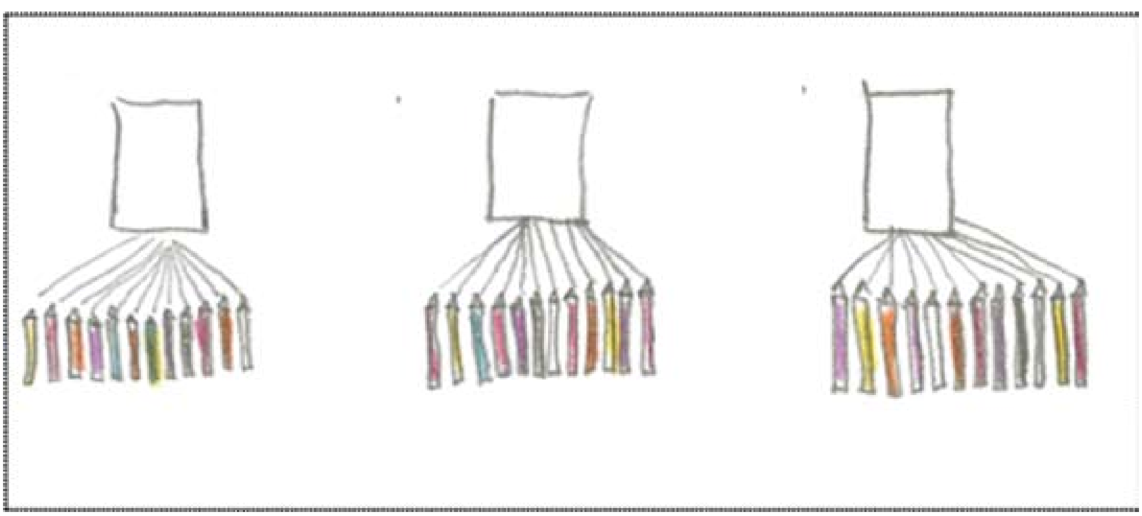
Situações de comparação entre razões

Para compreendermos essas situações multiplicativas vamos analisar os exemplos que seguem:

- **Em uma caixa de lápis de cor há 12 lápis. Quantos lápis há em 3 caixas iguais a esta?**

É possível pensar que a resolução mais fácil ao problema seria adicionar: 12 + 12 + 12 = 36. Na escola é comum o ensino da multiplicação como adição de parcelas iguais. Há, de fato, a possibilidade de resolver alguns problemas multiplicativos mais simples por estratégias próprias ao raciocínio aditivo. No entanto, o raciocínio multiplicativo é diferente e bem mais abrangente e complexo que o raciocínio aditivo.

O problema pode ser resolvido desta forma:



Acervo pessoal

O esquema "um para muitos", utilizado no registro da resolução é importante para a forma de pensar sobre o problema: para cada caixa correspondem 12 lápis. A quantidade de caixas e a quantidade de lápis (medidas) estão relacionadas por um número fixo de lápis por caixa, ou seja, 12 lápis por caixa.

Vejamos: há duas medidas no problema, número de lápis e número de caixas. Estas medidas estão relacionadas por uma relação fixa que é de 12 lápis por caixa. Observe o esquema:

	1 caixa = 12 lápis		
+ 1			+ 12
	2 caixa = 24 lápis		
+ 1			+ 12
	3 caixa = 36 lápis		

Aumentando o número de caixas numa relação fixa +1, temos um aumento na quantidade de lápis numa relação também fixa: +12.

Observa-se uma proporção entre a quantidade de caixas e a quantidade de lápis por caixa, uma vez que, sempre que é acrescentada uma caixa à coleção de caixas é acrescentado, também, 12 lápis à coleção de lápis.

Para manter constante a diferença entre as duas coleções, somamos números diferentes a cada uma, mantendo a correspondência "um para muitos", estabelecida inicialmente. A correspondência "um para muitos" é a base para o conceito de proporção. A proporção entre as coleções permanece constante, mesmo quando o número de caixas e de lápis muda. A proporção é a expressão da relação existente entre as duas coleções.

O raciocínio multiplicativo também envolve situações de divisão.

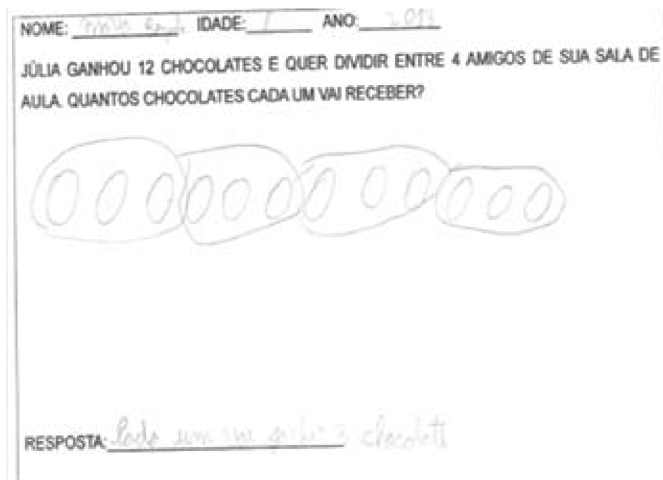
Exemplo:

- **Júlia ganhou 12 chocolates e quer dividir entre 4 amigos de sua sala de aula. Quantos chocolates cada um vai receber?**

Qual é a expectativa de resposta a essa situação-problema? Provavelmente, o que é bastante comum nas salas de aula, espera-se que o aluno apresente um algoritmo para a resolução de tal situação, isto é, faça 12 : 4 = 3. Mas, essa forma de resolução evidencia o raciocínio multiplicativo ou o conhecimento dos procedimentos de cálculo pelo uso do algoritmo?

O aluno do 1º ao 3º ano do Ensino Fundamental, possivelmente, não utilizará o algoritmo da divisão para a resolução, mas buscará outros meios, como: a contagem de objetos; a ação de repartição entre os amigos ou a representação por meio de desenhos (registro pictórico).

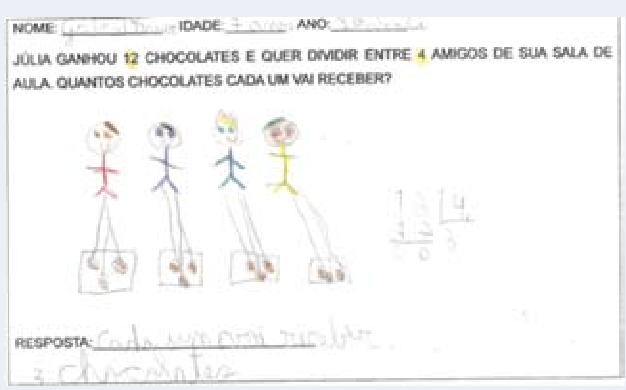
O registro pictórico é uma ilustração de como o aluno evidencia seu raciocínio multiplicativo, operando conceitualmente com a questão sem fazer uso de conta armada. Observe que Maria desenhou os 12 chocolates, circulando a quantidade que cada um receberá.


NOME: IDADE: ANO:
JÚLIA GANHOU 12 CHOCOLATES E QUER DIVIDIR ENTRE 4 AMIGOS DE SUA SALA DE AULA. QUANTOS CHOCOLATES CADA UM VAI RECEBER?
RESPOSTA:

Acervo pessoal

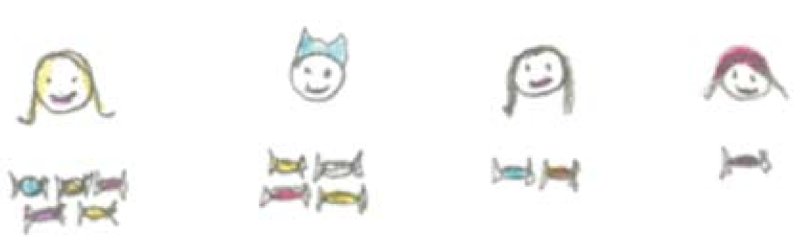
É possível distinguir o raciocínio aditivo do multiplicativo analisando o problema anterior: a quantidade de chocolates e de pessoas foi transformada em chocolates por pessoa, isto é, não se trata de uma relação com elementos de uma mesma natureza, chocolate com chocolate ou pessoas com pessoas, conforme acontece com as estruturas aditivas. Mas, de uma relação entre chocolates e pessoas. A transformação reside no princípio de que o resultado dessa relação se constitui em outro elemento, neste caso, chocolates por pessoa. Essa transformação diz respeito ao modo como as informações foram relacionadas, conforme pode ser observado na resolução de Gabriel.

Acervo pessoal


NOME: IDADE: ANO:
JÚLIA GANHOU 12 CHOCOLATES E QUER DIVIDIR ENTRE 4 AMIGOS DE SUA SALA DE AULA. QUANTOS CHOCOLATES CADA UM VAI RECEBER?
RESPOSTA:

Gabriel para resolver o problema, primeiramente destaca, no enunciado, as informações que deverá relacionar. Informa que descobriu a resposta "dando um chocolate para cada um", pensamento evidente em seu desenho, onde faz corresponder 3 chocolates a cada personagem.

Várias possibilidades de resolução do problema poderiam ser adotadas pelos alunos. Um exemplo é quando a criança "divide" ao seu modo os 12 chocolates entre seus 4 amigos, conforme a ilustração.



Acervo pessoal

Nesse caso, a criança determinou uma quantidade diferente de chocolate a cada amigo, dividindo os chocolates a partir de critérios próprios. Ações como essas são comuns entre as crianças, bem como, o uso da distribuição para resolver problemas semelhantes.

Já Gabriel realizou a divisão dos chocolates entre os amigos de modo que todos recebessem a mesma quantidade, distribuindo os chocolates entre eles por um esquema de distribuição: um para você, um para você, um para você, até terminar os chocolates, garantindo uma divisão equitativa dos chocolates entre os amigos. Nesse caso, Gabriel recorreu a uma estratégia aditiva ao acrescentar +1 chocolate para cada criança a cada rodada de sua ação de distribuição.

Situações de divisão por distribuição

O problema resolvido por Gabriel envolve uma divisão por distribuição. Observe:

- **Júlia ganhou 12 chocolates e quer dividir entre 4 amigos de sua sala de aula. Quantos chocolates cada um vai receber?**

  Quantidade a ser dividida: 12 chocolates

  Número de amigos: 4

  Chocolates por amigo: ?

O que caracteriza esses problemas é o fato de a quantidade a ser dividida e o número de amigos que receberão chocolates serem conhecidos. O quanto caberá a cada um é o que deverá ser determinado. Esses problemas são considerados mais simples e geralmente são muito explorados nas salas de aula. São conhecidos como típicos problemas de divisão.

Mas, é importante estar alerta para o fato de que a divisão envolve situações mais complexas do que a distribuição.

> *A criança ao realizar a distribuição, pode fazê-lo simplesmente recorrendo a um raciocínio aditivo em que vai acrescentando mais um elemento a cada rodada até que não haja mais elementos para uma nova distribuição. No entanto, dividir, como uma operação multiplicativa, implica que a criança possa também prestar atenção às relações entre as quantidades em jogo. Implica, em outras palavras, poder estabelecer relações de covariação entre os termos envolvidos na operação. (CORREA; SPINILLO, 2004, p. 109-110)*

Portanto, observa-se que Gabriel ainda precisa pensar sobre as relações de covariação entre os termos envolvidos no problema para compreender a divisão como operação multiplicativa. Analisando o problema podemos observar essas relações. Temos duas variáveis: número de chocolates e número de amigos e uma relação fixa: número de chocolates por amigo. No caso da divisão envolvida no problema, a relação entre as variáveis "número de chocolates por amigo" é constante e é justamente o que as crianças precisam compreender e encontrar para a resolução do problema. A relação de covariação está na ideia de que quando o número de amigos varia, o número de chocolates também varia. Por exemplo:

4 amigos $\longrightarrow$ 12 chocolates

3 amigos $\longrightarrow$ 9 chocolates

2 amigos $\longrightarrow$ 6 chocolates

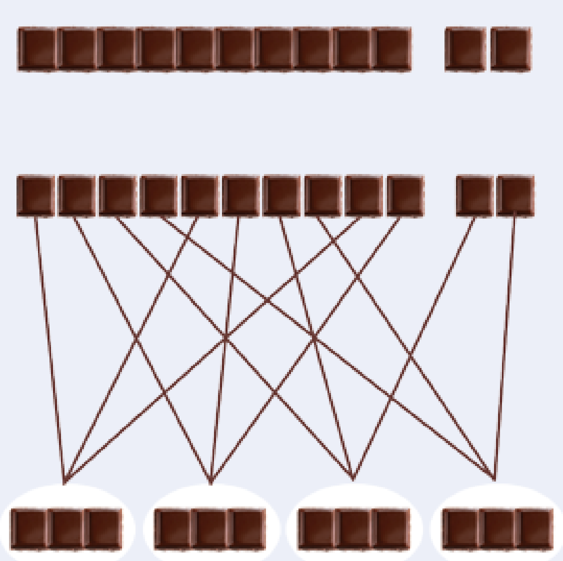
1 amigo $\longrightarrow$ 3 chocolates

Observe que a medida que diminui 1 amigo diminui 3 chocolates e esta relação se mantém constante.

RELAÇÃO CONSTANTE: 3 CHOCOLATES POR AMIGO

Problemas como esses são resolvidos com facilidade pelas crianças nos primeiros anos do Ensino Fundamental pelo uso de esquemas de correspondência e distribuição, mas é fundamental que esses esquemas sejam coordenados entre si e possibilitem a resolução de problemas mais complexos. Surge, assim, a necessidade de propor aos alunos a resolução dos mesmos desde o início da escolarização e por meio de diferentes suportes de representação.

O Material Dourado pode ser um recurso para explorar estratégias mais sistematizadas em relação ao algoritmo tradicional, já envolvendo as propriedades do Sistema de Numeração Decimal conforme o exemplo:



Na ilustração, os 12 chocolates são representados, inicialmente, pela barra que corresponde a uma dezena e por 2 cubinhos que correspondem a duas unidades. Entretanto, para a distribuição, conforme Gabriel fez em seu desenho, é preciso transformar a dezena em 10 unidades, de modo que resulte em $10 + 2 = 12$ unidades. Desse modo, torna-se possível a distribuição para os 4 amigos.

Situações de divisão envolvendo formação de grupos

Problemas de divisão podem envolver a formação de grupos, quando o tamanho do grupo é conhecido e o número de grupos possíveis deve ser determinado.

Em uma turma do 3º ano foram trabalhados problemas do campo multiplicativo a partir do contexto de uma história infantil, "As Centopeias e seus Sapatinhos", de Milton Camargo, Ed. Ática.

Os registros elaborados pelas crianças são apresentados a seguir como ilustração de situações de estruturas multiplicativas. Uma sugestão para a organização da prática pedagógica baseada em histórias infantis está na publicação denominada "A avaliação em matemática nas séries iniciais" que em linhas gerais propõe o seguinte:

> Uma possibilidade é propor às crianças que façam a leitura da história. Em seguida, propor-lhes que contem a história (registro oral) e representem-na por meio de um desenho (registro pictórico). Nesse desenho, de modo geral, as crianças costumam representar os elementos que mais lhe chamam a atenção na história. Pode-se, na sequência, propor problematizações sobre a história. A solução das problematizações pode ser evidenciada nos registros orais, pictóricos ou escritos, associadas a representações numéricas e espaciais. (GUÉRIOS, ZIMER et al, 2005, p. 9)

Além dessa obra, livros infantis são fontes interessantes para a elaboração de problemas que permitam a exploração das estruturas aditivas e multiplicativas.

A história "As Centopeias e seus Sapatinhos" pode disparar uma situação de divisão envolvendo formação de grupos, como a seguir:

- **Dona Centopeia levou 20 caixas de sapatos em sacolas. Em cada sacola foram colocadas 4 caixas de sapatos. Quantas sacolas foram utilizadas?**

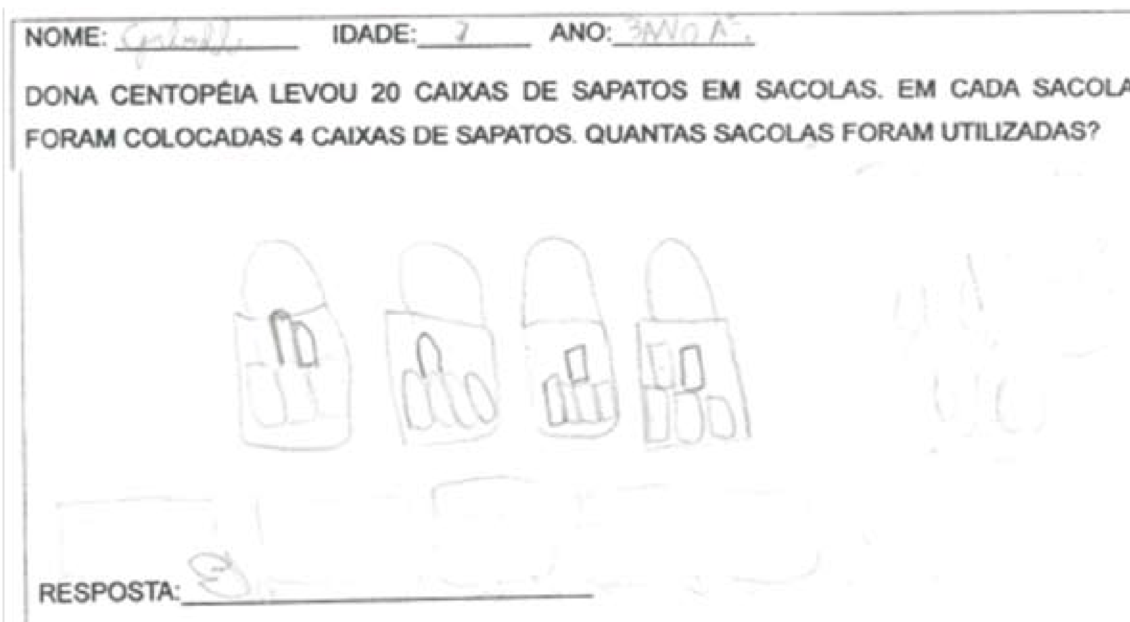
  Quantidade a ser dividida: 20 caixas de sapatos

  Tamanho do grupo: 4 caixas de sapatos em cada sacola

  Número de grupos: ?

A quantidade total de caixas de sapatos a ser colocada nas sacolas é conhecida, bem como, a quantidade a ser colocada em cada sacola (a quantidade de elementos de cada grupo). Com materiais concretos, as crianças podem facilmente resolver o problema formando grupos de 4 e usando o esquema da correspondência um para muitos: 4 caixas para 1 sacola, uma vez que a relação fixa entre número de caixas e número de sacolas é conhecida.

É visível pelo desenho ao pé da folha que Gabrielli tentou apagar o que havia feito para desenvolver outro raciocínio. É comum as crianças tentarem resolver problemas como esse distribuindo as caixas em 4 sacolas e obter o resultado 5. No entanto, nesse caso, o resultado corresponderia a 5 caixas de sapato em cada sacola. Embora o resultado numérico seja o mesmo, foi obtido por um erro de interpretação da situação envolvida no problema.



NOME: ____ IDADE: 7 ANO: ____

DONA CENTOPÉIA LEVOU 20 CAIXAS DE SAPATOS EM SACOLAS. EM CADA SACOLA FORAM COLOCADAS 4 CAIXAS DE SAPATOS. QUANTAS SACOLAS FORAM UTILIZADAS?

RESPOSTA: ____

Acervo pessoal

Este é mais um exemplo de que é necessário observar qual é a compreensão que o aluno tem da situação problema, considerando o processo de resolução e não apenas o cálculo realizado ou a resposta final apresentada.

Situações de configuração retangular

Os problemas deste tipo exploram a leitura de linha por coluna ou vice-versa. Exemplo:

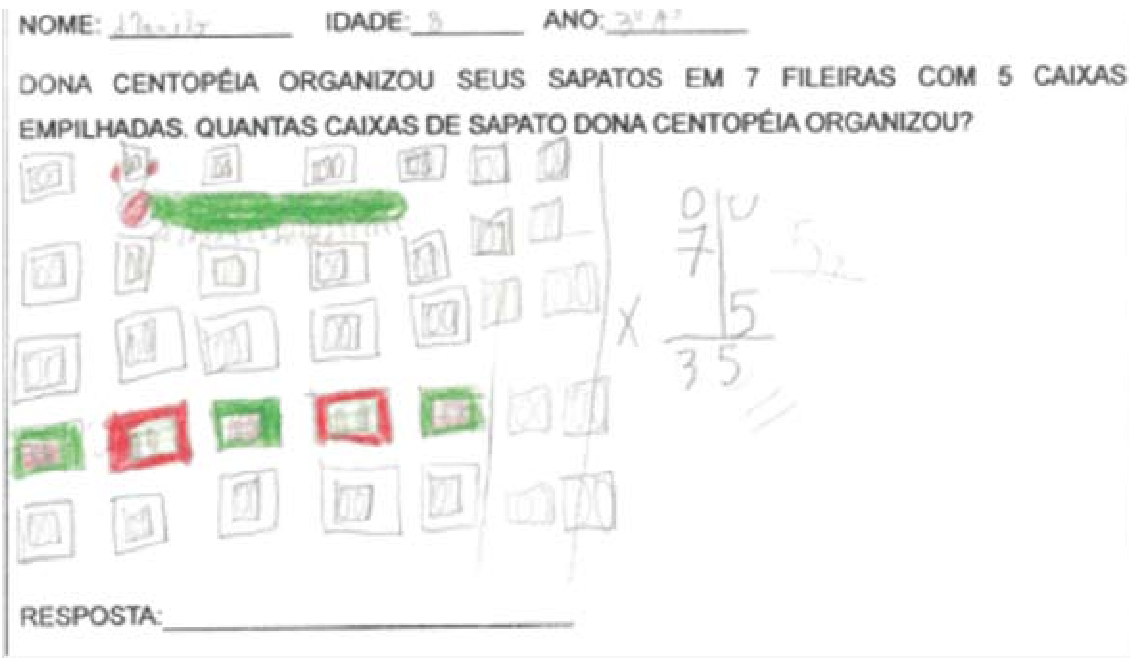
- **Dona Centopeia organizou seus sapatos em 7 fileiras com 5 caixas empilhadas. Quantas caixas de sapatos dona Centopeia organizou?**

  Medida conhecida – 7 fileiras

  Outra medida conhecida – 5 caixas por fileira

  Produto: ?

Para a resolução do problema, Danilo organizou as caixas de sapatos relacionando as duas medidas conhecidas: a quantidade de fileiras com a quantidade de caixas de sapatos por fileiras, constituindo uma representação com linhas e colunas, cujo resultado expressa o produto da relação entre essas quantidades, isto é, 7 fileiras por 5 colunas, resultando em 35. Este tipo de tabela é considerada por Vergnaud (2009) a forma mais natural de representação da relação entre as três medidas envolvidas em problemas dessa natureza. No caso exemplificado, tem-se as duas medidas simples conhecidas e busca-se a medida composta (o produto).



Acervo pessoal

No caso de Danilo, o registro pictórico permite observar sua compreensão sobre a situação problema e, também, pode ter contribuido para a busca do algoritmo que melhor representasse a operação utilizada para a resolução do problema, pois é possível perceber a tentativa de fazê-lo pelo algoritmo da divisão (escrita apagada pela criança). Certamente, como não obteve o resultado esperado, buscou encontrá-lo pelo algoritmo da multiplicação, com sucesso. A opção pela divisão, possivelmente, tenha ocorrido pela ideia de "distribuir" as caixas de sapatos entre as fileiras, gerando um entendimento de que se tratava de um cálculo de divisão. Outro aspecto a destacar é a forma como o algoritmo da multiplicação foi escrito, colocando o 7 na ordem das dezenas e o 5 na ordem das unidades, indicando a necessidade de uma intervenção sobre o modo de compreensão a respeito do significado das ordens numéricas no Sistema de Numeração Decimal.

Situações envolvendo raciocínio combinatório

Algumas situações envolvem a necessidade de verificar as possibilidades de combinar elementos de diferentes conjuntos. Por exemplo:

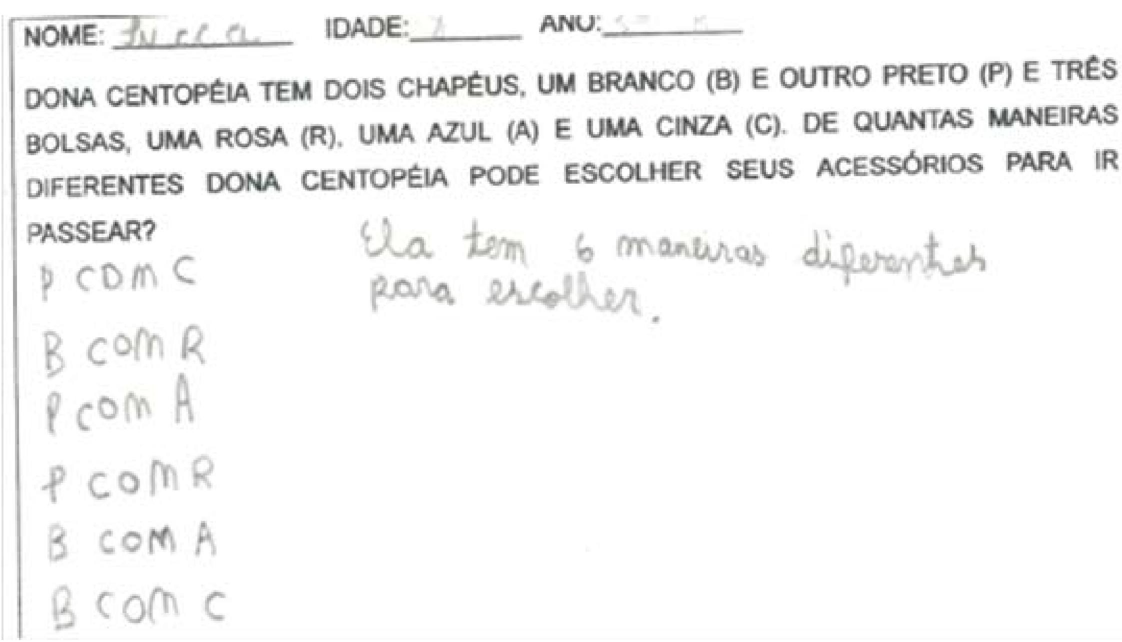
- **Dona Centopeia tem dois chapéus, um branco (B) e outro preto (P) e três bolsas, uma rosa (R), uma azul (A) e uma cinza (C). De quantas maneiras diferentes Dona Centopeia pode escolher seus acessórios para ir passear?**

  Conjunto conhecido: 2 chapéus

  Conjunto conhecido: 3 bolsas

  Número de possibilidades: ?

Temos dois conjuntos conhecidos: chapéus e bolsas, que devem ser combinados entre si para determinar o número de possibilidades de combinação. Vejamos como Lucca resolveu o problema:


NOME: Lucca IDADE: ANO:

DONA CENTOPÉIA TEM DOIS CHAPÉUS, UM BRANCO (B) E OUTRO PRETO (P) E TRÊS BOLSAS, UMA ROSA (R), UMA AZUL (A) E UMA CINZA (C). DE QUANTAS MANEIRAS DIFERENTES DONA CENTOPÉIA PODE ESCOLHER SEUS ACESSÓRIOS PARA IR PASSEAR?

Ela tem 6 maneiras diferentes para escolher.

P com C

B com R

P com A

P com R

B com A

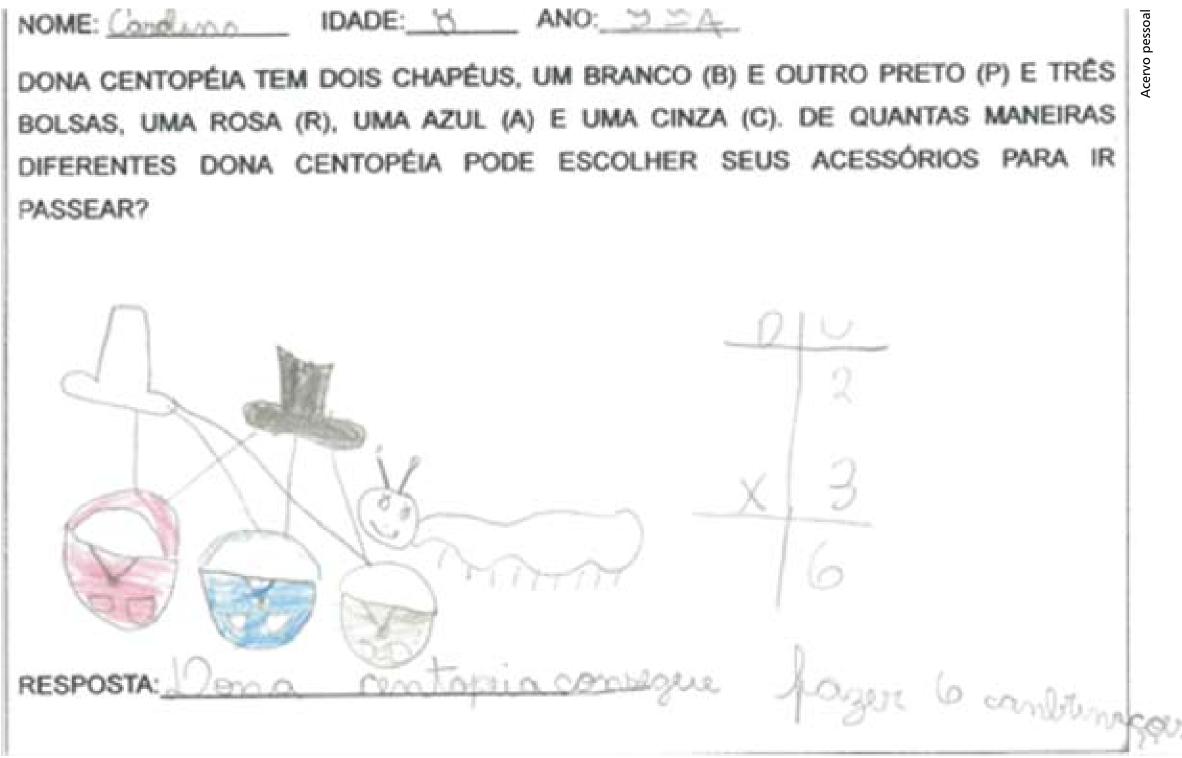
B com C

Acervo pessoal

Lucca constituiu as diferentes possibilidades de formar conjuntos como expressa em seu registro. Combinou os elementos dos conjuntos sem usar um esquema determinado e a seguir contou as diferentes possibilidades de conjuntos diferentes. O resultado foi encontrado pela contagem do total de possibilidades de combinações possíveis.

Vejamos como Carolina resolveu o problema:

Carolina registra por desenho o entendimento da relação de "um para muitos" na organização das combinações possíveis, ou seja, ela identifica a existência de dois conjuntos básicos: chapéus e bolsas e relaciona-os entre si ligando-os: chapéu branco com bolsa rosa, chapéu branco com bolsa azul, chapéu branco com bolsa cinza. Após faz o mesmo com o chapéu preto. Obtém 3 possibilidades de combinar o chapéu preto com as bolsas e três possibilidades de combinar o chapéu branco com as bolsas, ou seja, 2 vezes 3, obtendo ao todo 6 possibilidades de combinações diferentes. Carolina valeu-se do raciocínio multiplicativo para a resolução do problema e expressa esta ação pela conta de multiplicação.


NOME: Carolina IDADE: 8 ANO: 3º A

DONA CENTOPÉIA TEM DOIS CHAPÉUS, UM BRANCO (B) E OUTRO PRETO (P) E TRÊS BOLSAS, UMA ROSA (R), UMA AZUL (A) E UMA CINZA (C). DE QUANTAS MANEIRAS DIFERENTES DONA CENTOPÉIA PODE ESCOLHER SEUS ACESSÓRIOS PARA IR PASSEAR?

RESPOSTA: Dona centopia consegue fazer 6 conbinações

Acervo pessoal

Diagramas que evidenciam as possibilidades de combinações podem ser recursos interessantes para a resolução desses problemas. Por exemplo:

Chapéu preto: → Bolsa rosa / → Bolsa azul / → Bolsa cinza — 3 combinações

Chapéu branco: → Bolsa rosa / → Bolsa azul / → Bolsa cinza — 3 combinações

Ao todo, 2 x 3 = 6 combinações diferentes, ou seja, 6 possibilidades.

Embora não sejam familiares às crianças no ciclo fundamental de alfabetização, diagramas como esses, podem ser representações interessantes de serem usadas pelo professor na discussão desses problemas com as crianças, pois ajudam a organizar o pensamento e compreender o raciocínio envolvido.

Para o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo é importante propor aos alunos problemas variados, envolvendo as diferentes situações que compõem os campos conceituais. Assim as crianças enfrentam situações desafiadoras e não apenas resolvem problemas a partir da repetição de estratégias já conhecidas.

SOBRE CÁLCULOS E ALGORITMOS

Até agora enfatizamos que aprender sobre adição e subtração, multiplicação e divisão, envolve construir estratégias variadas e resolver diferentes problemas. No entanto, é importante lembrar que a compreensão dos conceitos próprios a essas operações requer coordenação com os diferentes sistemas de representação, o que torna clara a importância da interação da criança com diferentes formas de registros, dentre eles, os numéricos. Portanto, afirmar a necessidade de comprometer o processo de alfabetização matemática com o desenvolvimento das operações de pensamento necessárias para que as crianças se tornem capazes de resolver diferentes situações, não significa dizer que cálculos numéricos não devam ser trabalhados. Pelo contrário, desempenham um papel fundamental no processo. Como afirmam Nunes, Campos, Magina e Bryant: “[...] enfatizar o raciocínio não significa deixar de lado o cálculo na resolução de problemas: significa calcular compreendendo as propriedades das estruturas aditivas e das operações de adição e subtração.” (2005, p. 56)

Por outro lado, à medida que a dificuldade dos problemas avança e o campo numérico é ampliado, os cálculos numéricos tornam-se recursos importantes e necessários para a resolução e é fundamental que sejam trabalhados no ciclo inicial do Ensino Fundamental.

Quando afirmamos a importância do trabalho com cálculos, não estamos nos referindo apenas aos procedimentos de cálculo tradicionalmente ensinados na escola, que envolvem técnicas operatórias determinadas, tais como: “vai um”, “pede emprestado”, “deixar uma casa em branco”, “abaixar o número”, entre outros, chamados de algoritmos tradicionais. Estamos nos referindo também a outros procedimentos de cálculo, como estratégias inventadas pelos alunos e o uso de recursos didáticos como o ábaco, material dourado e a calculadora.

Dificilmente os algoritmos tradicionais com lápis e papel são utilizados em situações extraescolares. Muitos adultos e crianças desenvolvem técnicas de cálculo próprias a partir da necessidade de resolver problemas numéricos do seu dia a dia.

Por exemplo, o cálculo necessário a fornecer o troco de uma compra no valor de R$ 48,00, paga com uma cédula de R$100,00, dificilmente é realizado pelo algoritmo tradicional.

$$\begin{array}{rrr} {}^{0}\cancel{1} & {}^{9}\cancel{0} & {}^{1}0 \\ - & 4 & 8 \\ \hline & 5 & 2 \end{array}$$

Certamente, estratégias mais eficientes e rápidas possibilitam o cálculo correto do troco, como por exemplo:

- completar quanto falta: se tenho R$ 48,00 para R$ 50,00 faltam R$ 2,00. Já para R$ 100,00, faltam R$ 50,00. Portanto, o troco é de R$ 52,00;
- tirar R$ 40,00 de R$ 100,00, restando R$ 60,00. Destes, tirar R$ 8,00, restando R$ 52,00.

O mesmo em uma situação que envolve determinar o preço a pagar por 8 metros e meio de fita sendo que o metro custa R$ 1,50.

O algoritmo tradicional pode ser substituído por estratégias de cálculo, como:

1,5 x 2 metros = R$ 3,00. (preço a cada dois metros)

4 x R$ 3,00 = R$ 12,00. (preço de 8 metros)

R$ 0,75 (preço de meio metro)

R$ 12,00 + R$ 0,75 = R$ 12,75 (preço total)

Mas, não só adultos constroem métodos próprios de calcular em situações-problema do cotidiano. No livro “Na vida dez na escola zero”, Carraher, Carraher e Schliemann (1988) já evidenciaram que meninos feirantes usavam métodos de cálculo “naturais” ou “inventados”, diferentes dos da escola, nas situações que envolviam o comércio de frutas. Por exemplo, ao ser questionado sobre quanto custariam 9 abacates se o preço de 1 abacate era, na época, 5 Cruzeiros, um aluno respondeu de imediato 45. Questionado sobre o porquê da resposta, explicou: 7 são 35, com mais 1, 40; com mais 1, 45. Essas crianças, no entanto, não se saíam tão bem na escola, pois não dominavam as técnicas operatórias ensinadas por seus professores e também não as relacionavam com as situações que vivenciavam em seu trabalho.

Van de Walle (2009) refere-se a essas formas de calcular como estratégias “inventadas” e as define como métodos pessoais e flexíveis de calcular que são compreendidos pela pessoa que os usa. São estratégias que podem ser feitas mentalmente ou por escrito, mais rápidas e menos sujeita a erros do que os algoritmos tradicionais, uma vez que fazem sentido para quem as utiliza.

Para o autor o desenvolvimento dessas estratégias inventadas, além de fluência no cálculo e possibilitar que se tornem mais ágeis e cometam menos erros, expressam uma compreensão rica e profunda do sistema numérico, fornecendo uma base sólida para o cálculo mental e por estimativas e contribuem para o envolvimento num processo de “fazer matemática”.

A importância de trabalharmos com cálculos na escola de modo distinto ao que é tradicionalmente trabalhado e de modo bastante semelhante ao realizado por adultos e crianças fora do contexto escolar já foi defendida por Parra (1996), também há algum tempo. Sua proposta envolve trabalhar com cálculos que denominou "pensados" ou "refletidos", ou seja, procedimentos mentais ou escritos selecionados em função dos números e da operação envolvida num problema, não automatizados e diferentes dos algoritmos tradicionais, mas apoiados nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações. Esses cálculos colocam em ação, conforme a autora, diferentes relações entre os números. Em outras palavras, permitem "raciocinar" sobre o que está sendo feito, ao contrário de utilizarem algoritmos de forma mecânica.

Estratégias de cálculo diferentes dos algoritmos tradicionais são construídas a partir da compreensão das propriedades das operações e do sistema de numeração decimal de quem as "inventa". Por exemplo, cálculos realizados por decomposição de números, são utilizados com frequência por facilitar e tornar mais ágil o processo e estão apoiados na compreensão do princípio aditivo do sistema de numeração decimal.

$$\begin{array}{r} 36 \\ +\,24 \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcr} 30 & + & 6 \\ 20 & + & 4 \\ \hline 50 & + & 10 = 60 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcrcr} 30 & + & 20 & = & 50 \\ 6 & + & 4 & = & 10 \\ \hline & & & & 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ \ 8 \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 30 + 6 \\ \times\ 8 \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcr} 30 \times 8 & = & 240 \\ 6 \times 8 & = & +\ 48 \\ \hline & & 288 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 156 \\ -\ 48 \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 100 + 50 + 6 \\ -\ 40 + 8 \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 100 + 40 + 16 \\ -\ 40 + \ \ 8 \\ \hline \underbrace{100 + \ \ 0 + \ \ 8}_{108} \end{array}$$

A proposta didática de Parra (1996) é que os alunos possam articular o que sabem com o que têm que aprender diante de situações partindo da análise dos dados, buscando os procedimentos que lhes pareçam mais úteis, discutindo suas escolhas e analisando sua pertinência e sua validade. Nessa perspectiva, cada cálculo é um problema novo e o caminho a ser seguido é próprio de cada aluno, o que faz com que para uns possa ser mais simples e, para outros, mais complexo.

O fato é que, estratégias de cálculo construídas a partir dos conhecimentos que já fazem parte da bagagem dos alunos e a partir das relações sobre os números e operações que os envolvem, costumam ser mais rápidas e eficientes para quem as utiliza.

Estratégias como essas não surgem do nada. Precisam ser trabalhadas em sala de aula.

Dentre os procedimentos possíveis de serem estimulados e propostos pelos professores sugerimos alguns que descreveremos a seguir.

CONTAGEM

A contagem é um procedimento natural e bastante útil na resolução de cálculos pelas crianças. Alguns procedimentos que auxiliam no desenvolvimento de estratégias de cálculo são: contar para frente; contar para trás; contar de 2 em 2, 3 em 3, 5 em 5, 10 em 10; contar a partir de um determinado número.

Jogos de percurso em que as crianças avançam e retrocedem casas são um excelente recurso para desenvolvimento do raciocínio aditivo e também de estratégias de contagem. O jogo de percurso "Coelhinho procurando a toca" tem o objetivo de propor a contagem de 2 em 2. O mesmo jogo pode ser adaptado para trabalhar a contagem de 3 em 3 ou outros intervalos.

Coelhinho procurando a toca

Coelhinho procurando a toca

Objetivo do jogo: Contagem de 2 em 2

Materiais:

- 1 tabuleiro;
- 1 dado com três faces azuis e com três faces vermelhas, contendo apenas o número 2 nas faces;
- 3 peões (coelhinhos).

Número de jogadores: 3 jogadores

Fonte: <http://evangelizacaoespirita.zip.net/images/Jogotabuleiro1.JPG>.

Regras do jogo:

Os jogadores deverão “ajudar” o coelhinho a encontrar sua toca saltando sobre as casinhas do tabuleiro. O jogador poderá “sair” da toca inicial somente quando cair uma face azul no dado. Caso contrário, nela permanecerá até que isso ocorra. Se cair uma face azul avança duas casas. Se cair uma face vermelha volta duas casas. Ganha o jogo o jogador que conseguir chegar por primeiro à última casa (onde está a toca).

O mesmo jogo pode ser jogado com outro dado: 3, 3, 3 azul e 3, 3, 3 vermelho, explorando a contagem de 3 em 3.

Problematizando situações após o jogo:

João estava na casinha 4. Quantas vezes Mário terá que jogar o dado e que cores têm que cair para que ele possa chegar na casinha 20 o mais rápido possível? Vá preenchendo as casinhas pelas quais o coelhinho deverá passar.

Caio teve muita sorte! Em todas as rodadas do jogo sorteou nos dados: 2 azul, o que lhe permitiu avançar sempre e ganhar o jogo. Escreva as casas pelas quais Caio passou para chegar à toca do coelhinho.

RECURSO À PROPRIEDADE COMUTATIVA

A propriedade comutativa da adição e da multiplicação é um recurso importante para o cálculo, uma vez que facilita a memorização e também a realização dos cálculos.

A propriedade comutativa da multiplicação é definida por "a x b = b x a", ou seja, a ordem dos fatores não altera o produto. Por exemplo, 3 x 4 = 4 x 3.

É importante chamar a atenção para o fato de que a propriedade comutativa é uma propriedade da adição e da multiplicação, mas que nem sempre se aplica à situação-problema neles envolvida.

Será que ao mudar a ordem dos fatores, a situação-problema continua sendo a mesma? Veja um exemplo:

- **Um professor trabalha 4 horas por dia, de segunda-feira à sexta-feira. Quantas horas ele trabalha nesse período da semana?**

  O problema pode ser resolvido pelo cálculo 5 x 4 = 20, considerando 4 + 4 + 4+ 4 + 4 = 20, uma vez que o professor trabalha 4 horas durante 5 dias da semana, totalizando 20 horas semanais. Mas, qual seria a situação para esse professor se a representação fosse 4 x 5 = ?

  A quantidade de horas trabalhadas na semana é a mesma do problema anterior? E a quantidade de horas trabalhadas por dia? E a quantidade de dias trabalhados por semana? Nessa situação, apesar de o total de horas trabalhadas por semana ser a mesma da primeira situação, 20 horas, nesse último caso, o professor trabalharia 5 horas por dia ao invés de 4 horas e somente 4 dias na semana ao invés de 5 dias: 5 + 5 + 5 + 5 = 20

No caso da adição, ocorre algo semelhante. Veja o exemplo:

- **Júlia foi fazer compras para a sua mãe. Na padaria comprou pão e leite, e gastou R$ 6,50 e no açougue comprou um quilo de carne e gastou R$ 13,30. Quanto Júlia gastou ao todo?**

  O problema pode ser resolvido pelo cálculo: 6,50 + 13,30 = 19,80, onde a primeira parcela corresponde ao que Júlia gastou na padaria e a segunda ao que Júlia gastou no açougue. Podemos afirmar que alterando as parcelas 13,30 + 6,50 = 19,80 obteríamos o mesmo resultado, o que não está incorreto se pensarmos apenas nos números envolvidos no problema. Mas, e se Júlia tiver que prestar contas dos gastos à sua mãe? Alterar as parcelas poderia dificultar a explicitação do valor correspondente a cada gasto.

MEMORIZAÇÃO DE FATOS NUMÉRICOS

Quando falamos em memorização como recurso aos cálculos mentais, logo vem à mente a questão da tabuada: decorar ou não decorar? Há várias críticas, com as quais concordamos, ao ensino da **tabuada** de modo mecânico e memorístico e ao entendimento dessa abordagem como forma de ensino da multiplicação. Como já comentado, aprender multiplicação requer muito mais do que memorizar as tabuadas.

No caderno 8 o tema "tabuada" será tratado com maiores detalhes.

Por outro lado, há aqueles que, como nós, reconhecem na tabuada uma maneira de agilizar processos de cálculos a partir da memorização de resultados da multiplicação entre os fatores. No entanto, entendemos que essa memorização deva ser consequência da adoção de estratégias metodológicas que permitam a construção/estruturação de regularidades entre os fatos numéricos e a memorização dos mesmos por caminhos diferentes da "decoreba" destituída de significado, muitas vezes presentes nas salas de aula[1].

Observe um depoimento sobre a questão da memorização de fatos e a tabuada.

O USO DA TABUADA EM SALA DE AULA

Marina de Fátima Dolata – professora regente 2º e 3º anos.
E.M. Tanira Regina Schmidt – NREBV

Ao me deparar com o conteúdo de multiplicação nos planos trimestrais do 3º ano, lembrei-me imediatamente de quando eu, estudante do ensino fundamental, fui apresentada à temida tabuada... E agora era a minha vez de apresentá-la. Pensei de que forma poderia ensinar a multiplicação e a tabuada sem que meus alunos precisassem apenas decorá-la e realizar algoritmos mecanicamente, sem ao menos refletir sobre aquela operação e sua função em nossas vidas. Enfim, a multiplicação passa a ser entendida muitas vezes, apenas na prática e para muitos adultos apenas no uso atrelado ao sistema monetário. Para alguns, nem nestas situações comuns, pois apenas decoraram algo sem saber ao menos onde aplicar o conhecimento adquirido.

Compreender é fundamental. É inconcebível exigir que os alunos recitem a tabuada, sem que tenham entendido o significado do que estão dizendo. Na multiplicação, bem como em todas as outras operações, a noção de número e o sistema de numeração decimal, precisam ser construídos e compreendidos, trabalho iniciado no ciclo I e consolidado nesta etapa, no 3º ano. No ciclo II, a ampliação se dará a partir dos conhecimentos que as crianças devem se apropriar até o final do ciclo I.

[1] A esse respeito, veja Spinillo e Magina (2004).

Assim, a construção da ideia multiplicativa iniciou-se com a ideia aditiva. O trabalho com material manipulativo foi fundamental para que alguns alunos percebessem de que forma aquela problematização estava sendo resolvida. Manipular objetos na matemática para algumas crianças é necessário, pois necessitam se apoiar na visualização das quantidades para então representá-las com números. Com a resolução de situações-problema em diferentes contextos, os alunos desde o 2º ano já são colocados em situações envolvendo a ideia multiplicativa.

Em minha sala, as correções de situações-problema acontecem no quadro de giz, com a exposição das diferentes formas de resolução por parte das crianças, sendo resolvidas por elas mesmas. Em dada situação-problema ocorreu a seguinte conclusão por parte dos alunos: a multiplicação "facilita a matemática" e com ela encontramos o mesmo resultado da adição.

Durante a resolução em sala, tivemos cinco soluções: um aluno optou pelo desenho bem esquematizado para responder "Se um coelho tem quatro patas, quantas patas têm 8 coelhos juntos?". O aluno desenhou os 8 coelhos com todos seus detalhes. A segunda aluna optou pela representação esquemática, desenhando bolinhas e palitinhos para representar coelhos e número de patas. O terceiro aluno agrupou palitinhos de 4 em 4. A quarta criança realizou a adição de oito parcelas contendo o número 4. E finalmente, um aluno com um raciocínio matemático mais consolidado, foi ao quadro e resolveu: 4 x 8 = 32. Foi o primeiro a se sentar. Como as crianças que optaram pelo desenho demoraram mais que os demais alunos, a turma prontamente concluiu que em muitas situações o uso do algoritmo seja da soma ou da multiplicação é mais eficaz. E com relação à multiplicação, compreenderam que esta operação agiliza o processo da adição, especialmente quando envolve muitas parcelas iguais. O uso do dobro e do triplo também foi apresentado envolvendo a ideia aditiva e aos poucos, introduzida a ideia multiplicativa.

Com o uso constante dos algoritmos da multiplicação, creio que as crianças irão memorizar os fatos mais comuns, especialmente os contidos nas tabuadas até 10, base do nosso sistema de numeração. Memorizar com seu uso e aplicação, e não apenas decorar a tabuada. Para que o raciocínio matemático fique ainda mais ágil, estão sendo propostos jogos variados, em sala e no laboratório de informática. Como por exemplo, bingo de tabuada, memória dos fatos, jogo do dobro e triplo, cálculos mentais e todo tipo de jogos que contribuam para a fixação do raciocínio da multiplicação e por consequência sua memorização. Mas memorização sem compreensão não dará ao nosso aluno uma aprendizagem significativa, construída para que se leve adiante em sua vida escolar. Antes de qualquer coisa, deve haver compreensão para que a temida tabuada lá do nosso tempo de estudante, seja uma aliada na caminhada matemática das nossas crianças.

Além das sugestões apresentadas pela professora Marina sobre as estratégias para o trabalho com a tabuada, Ponte et al (2005), propõe o trabalho com os fatos numéricos da multiplicação pelo desenvolvimento de atividades investigativas, nas quais os alunos são convidados a analisar padrões e regularidades existentes nas operações, por exemplo a seguinte:

> Outro olhar sobre a tabuada
>
> Construa a tabuada do 3. O que encontra de curioso nesta tabuada? Prolongue-a calculando 11 x 3, 12 x 3, 13 x 3 ... e formule algumas conjecturas. (PONTE et al, 2005, p. 64)

Atividades como essa, tanto em relação à multiplicação como em relação à adição, que contribuem para a construção de recursos cognitivos que auxiliam a memorização, pois as crianças têm a oportunidade de estabelecer relações entre os fatos e perceber regularidades por processos investigativos.

Outra sugestão é proposta por Pires (2013) para a construção de Fatos Básicos da Multiplicação por meio da elaboração coletiva e gradativa da "Tábua de Pitágoras". A autora explica que se trata de uma "tabela de dupla entrada na qual são registrados os resultados da multiplicação dos números que ocupam a linha e a coluna principais" (p. 148). A atividade volta-se para a possibilidade de exploração das regularidades que aparecem na construção da Tábua. É uma proposta bastante semelhante a apresentada por Van de Walle (2009, p. 203).

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2								
3	3								
4	4								
5	5								
6	6								
7	7								
8	8								
9	9								

Pires (2013, p. 148-156) propõe que a construção da "Tábua de Pitágoras" seja feita de forma gradativa e iniciada com o preenchimento da primeira linha e da primeira coluna, após a discussão sobre como a atividade deve ser realizada. Este diálogo visa a problematizar situações para que os alunos percebam regularidades tais como:

- 1 x 3 tem o mesmo resultado de 3 x 1, embora representem situações distintas, conforme já comentado. (propriedade comutativa);
- quando um dos fatores é "1", o resultado da multiplicação é igual ao outro fator. (elemento neutro);
- o preenchimento da segunda linha e coluna se constitui no dobro dos resultados da primeira linha e coluna. O mesmo acontece com a quarta linha e coluna em relação à segunda e com a oitava linha e coluna em relação à quarta.

Outras regularidades são observáveis, tais como as relações entre as tabuadas do 3, 6 e 9 e ao fato de que os resultados da tabuada do 5 terminam em 5 ou 0.

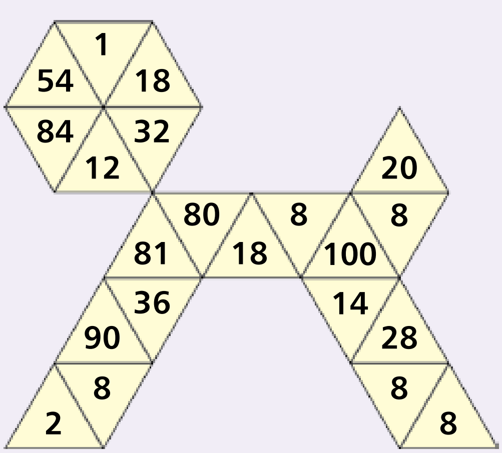
Assim como Pires, concordamos que esta não pode ser a única alternativa para o trabalho com o estudo dos fatos fundamentais da multiplicação. O professor pode se valer dos jogos como recursos também para a memorização de fatos numéricos da multiplicação. Um exemplo é o jogo adaptado de Kamii e Livingston (1995, p. 177) e das problematizações propostas por Agranionih e Smaniotto (1999).

Gatos malhados

Gatos malhados

Materiais:

- Tabuleiro com 55 espaços contendo todos os fatos básicos da multiplicação;
- Placar de pontos para cada jogador em forma de gato com produtos possíveis, conforme o modelo.



- 1 dado numerado de 1 a 6;
- Botões ou fichas para marcação de pontos.

Número de jogadores: 3 a 5

Tabuleiro:

Início

4 x 3	5 x 2	9 x 7	7 x 4	10 x 5	8 x 1	9 x 3	3 x 3	4 x 1	7 x 2	2 x 2
8 x 4	1 x 1	10 x 7	8 x 8	5 x 4	7 x 7	10x10	4 x 2	8 x 3	9 x 6	2 x 1
3 x 2	8 x 7	10 x 6	8 x 5	9 x 5	3 x 1	7 x 5	4 x 4	7 x 3	10 x 2	9 x 2
10 x 3	5 x 5	9 x 1	6 x 1	6 x 5	9 x 4	9 x 9	8 x 8	10 x 4	5 x 1	5 x 3
6 x 2	8 x 6	6 x 3	7 x 6	8 x 2	6 x 6	6 x 4	10 x 8	10 x 1	10 x 9	7 x 1

Regras do jogo:

Um jogador de cada vez joga o dado e move, em qualquer direção, sua peça no tabuleiro quantas casas for sorteado, realizando a multiplicação indicada no local em que sua peça parar.

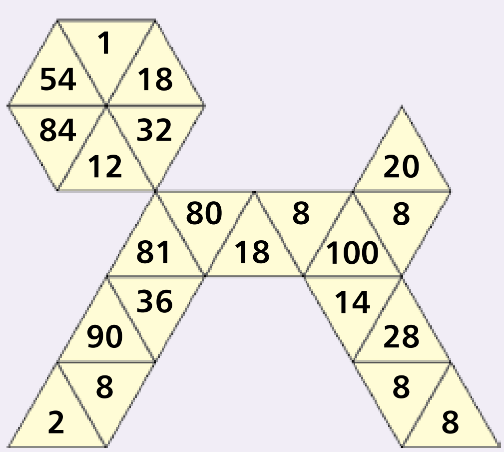
Variante: todos que tiverem o produto em suas cartelas, marcam ponto.

Problematizando situações após o jogo:

Para ganhar o jogo é preciso marcar o número 40. Quais multiplicações, no jogo, podem dar esse resultado ?

E se faltar marcar o número 24 para ganhar, quais multiplicações são possíveis no jogo?

Quais multiplicações, no jogo, possibilitarão marcar todos os números do “gato”?



Veja onde está a peça de Marcos no tabuleiro. Ele jogou o dado e caiu o número 6. Que número Marcos poderá marcar no seu gato?

Início

4 x 3	5 x 2	9 x 7	7 x 4	10 x 5	8 x 1	9 x 3	3 x 3	4 x 1	7 x 2	2 x 2
8 x 4	1 x 1	10 x 7	8 x 8	5 x 4	7 x 7	10x10	4 x 2	8 x 3	9 x 6	2 x 1
3 x 2	8 x 7	10 x 6	8 x 5	9 x 5	3 x 1	7 x 5	4 x 4	7 x 3	10 x 2	9 x 2
10 x 3	5 x 5	9 x 1	6 x 1	6 x 5	9 x 4	9 x 9	8 x 8	10 x 4	5 x 1	5 x 3
6 x 2	8 x 6	6 x 3	7 x 6	8 x 2	6 x 6	6 x 4	10 x 8	10 x 1	10 x 9	7 x 1

DOBROS E METADES

Dobros e metades são fáceis de memorizar e podem ser um recurso bastante interessante para o cálculo mental. O reagrupamento em torno de um dobro pela decomposição de uma das parcelas e o apoio da propriedade associativa da adição permite relacionar os números de modo a facilitar o cálculo.

A propriedade associativa da adição é definida por $(a + b) + c = a + (b + c)$, ou seja, o resultado não altera quando são associadas parcelas diferentes. Por exemplo: $(3 + 7) + 2 = 3 + (7 + 2)$

Exemplos:

a) $7 + 8 =$ $\quad 7 + (7 + 1) =$
$(7 + 7) + 1 = 15$
$14 + 1 = 15$

Observe que o 8 foi decomposto em função de obter 7.

b) $7 + 14 =$ $\quad 7 + (7 + 7) = 21$ ou $3 \times 7 = 21$

c) $14 - 6 =$ $\quad (7 + 7) - 6 =$
$7 + (7 - 6) =$
$7 + 1 = 8$

Estes procedimentos podem ser trabalhados em sala de aula a partir de atividades investigativas como a que segue:

Veja como Rui resolveu os cálculos abaixo:
$4 + 5 = 4 + 4 + 1 = 9$
$8 + 9 = 8 + 8 + 1 = 17$
$7 + 8 = 7 + 7 + 1 = 15$

Rui falou que desse jeito é mais fácil de encontrar o resultado.

Explique o jeito de Rui fazer os cálculos: ____________________

Você concorda com Rui? __________ Por quê? ____________________

Jogos são excelentes recursos para a memorização de dobros e metades e dão suporte à construção de estratégias, por exemplo, como ocorre no jogo “Dobros e Metades.

Dobros e metades

Dobros e metades

Materiais:

- 2 baralhos de números pares com cartas do 2 ao 20;
- 1 dado com as seguintes faces: dobro, metade, dobro, metade, dobro, metade;
- Objetos para contagem: fichas ou palitos.

Número de jogadores: 4

Regras do jogo:

Colocar as cartas do baralho sobre a mesa, embaralhadas, com a face virada para baixo. Distribuir as cartas do outro baralho entre os 4 jogadores. O primeiro jogador vira a primeira carta do monte e joga o dado. Se a carta for 4 e no dado cair metade, deverá procurar entre as suas cartas se tem o 2. Caso tenha, junta o quatro da mesa formando um par e o coloca ao lado para posterior contagem de pontos. Caso não tenha, passa a vez ao próximo jogador que deverá proceder do mesmo modo, ou seja, procurar entre suas cartas o 2, se tiver como, forma o par e se não tiver passa a vez, caso não seja possível formar o par (por exemplo, ao virar a carta do monte saiu 20 e o dado caiu como dobro), o próximo jogador joga o dado novamente. Sempre que um dos jogadores formar um par, o próximo deverá virar mais uma carta do baralho que está sobre a mesa.

Problematizando situações após o jogo

Marta tem em sua mão as cartas: 4, 10, 12. Com quais cartas poderá formar par se no dado cair “dobro”?

Juca virou a carta 20. O que terá que cair no dado para que possa formar par com algumas de suas cartas? Por quê?

Quais cartas fariam par nas jogadas a seguir:

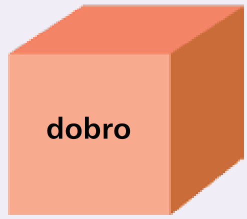
Carta com 2

Carta com 4

Carta com 6

Carta com 8

Carta com 10



Quais cartas fariam par nas jogadas abaixo?

Carta com 20

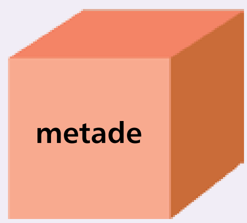
Carta com 18

Carta com 16

Carta com 10

Carta com 8

Carta com 4



REAGRUPAR EM DEZENAS OU CENTENAS

Vejam alguns exemplos do uso deste procedimento na resolução das operações.

Na resolução abaixo observamos que o aluno decompôs os números em dezenas e unidades, subtraindo as dezenas e as unidades separadamente e somando os resultados.

$$\begin{array}{r} 34 \\ -\ 12 \\ \hline \\ \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30 \\ -\ 10 \\ \hline 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ -\ 2 \\ \hline 2 \end{array} \qquad 20 + 2 = 22$$

Já na segunda resolução decompôs o 12 em 10 + 2, subtraindo inicialmente o 10 de 34 e por fim subtraindo o 2 do 24 restante.

$$34 - 10 = 24$$
$$24 - 2 = 22$$

Já na última resolução não usou a decomposição em dezenas e unidades, mas a adição e um esquema de complementar quantos faltam para a dezena mais próxima, no caso 20 e depois, complementar quantos faltam para 34.

$$\begin{array}{r} 34 \\ -\ 12 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ +\ 8 \\ \hline 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20 \\ +\ 14 \\ \hline 34 \end{array} \qquad 22$$

Estas estratégias podem ser trabalhadas também a partir de atividades investigativas que chamem a atenção para a possibilidade de serem utilizadas no cálculo, como abaixo:

Luís também inventou um jeito diferente de fazer contas. Olha como ele fez:

28 + 12 = 20 + 8 + 10 + 2 =

30 + 10 = 40

Você descobriu o segredo de Luís? Qual é? ______________________________

Então resolva as continhas do jeito dele. Depois veja se o seu colega fez igual a você.

34 + 41 + 35 =

86 + 35 =

Carlos encontrou um jeito fácil de fazer as contas de sua lição de casa. Olhe como ele fez:

4 + 8 + 6 + 2 + 3 =

10 + 10 + 3 = 23

Você descobriu o segredo de Carlos? Qual é? ______________________________

____

Então resolva as continhas do jeito dele. Depois veja se o seu colega fez igual a você.

9 + 3 + 6 + 1 + 1 =

4 + 5 + 3 + 2 + 5 + 1 =

Gabriel resolveu os cálculos de um jeito diferente. Veja como ele fez:

$$14 - 8 = \qquad \begin{array}{r} 10 + 4 \\ -\,8 \\ \hline 2 \end{array} \qquad 2 + 4 = 6$$

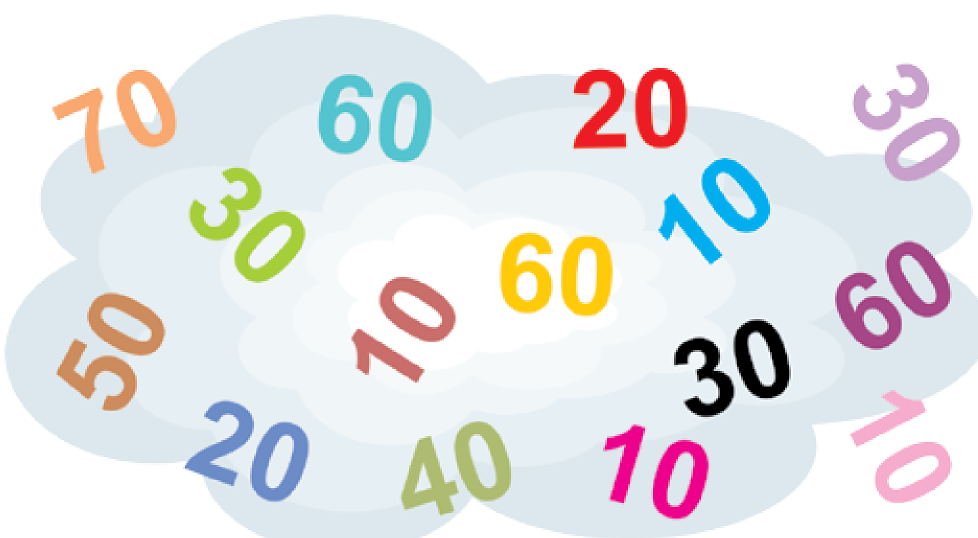
Gabriel disse que a resposta é 6. João disse que não podia fazer uma conta de mais se a conta inicial era de menos.

Você concorda com Gabriel ou com João? ________________ Por quê?

____

____

Margarida percebeu que todas as continhas que resolveu na sua lição de casa deu o resultado 100. Quando estava pensando sobre isso, aconteceu algo incrível. Todos os números das contas saltaram do papel e se misturaram. E agora?



Ajude Margarida a refazer as continhas. Lembre que é preciso formar contas com os números de modo que resultem em 100.

Como já salientamos, é fundamental que o professor proporcione às crianças oportunidades de desenvolver estratégias de cálculo a partir da coordenação dos conhecimentos que já possuem sobre as operações e sobre o sistema de numeração decimal. Um modo bastante interessante de fazer isso é propor atividades que permitam às crianças estabelecer relações e/ou encontrar regularidades entre os números envolvidos que possam ser úteis ao cálculo, desde as mais elementares às mais complexas.

ALGORITMOS TRADICIONAIS

A expressão "fazer contas" faz parte do cotidiano escolar. Até o momento mostramos que o "fazer contas" pode ser realizado de diferentes maneiras. O algoritmo tradicional é uma dessas maneiras e é sobre o qual trataremos a seguir.

O algoritmo tradicional das operações permite realizar cálculos de uma maneira ágil e sintética principalmente quando envolve números altos. Possibilita, também, ampliar a compreensão sobre o Sistema de Numeração Decimal (SND).

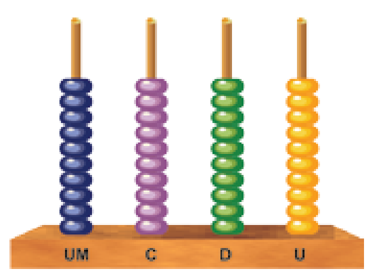
Primeiramente trataremos das conhecidas "conta de mais" e "conta de menos". São modos de representar os processos operativos da adição e da subtração pautados nas propriedades do SND. É importante que a criança tenha se apropriado das características do SND para que compreenda os processos operativos dos algoritmos.

imagem baixa

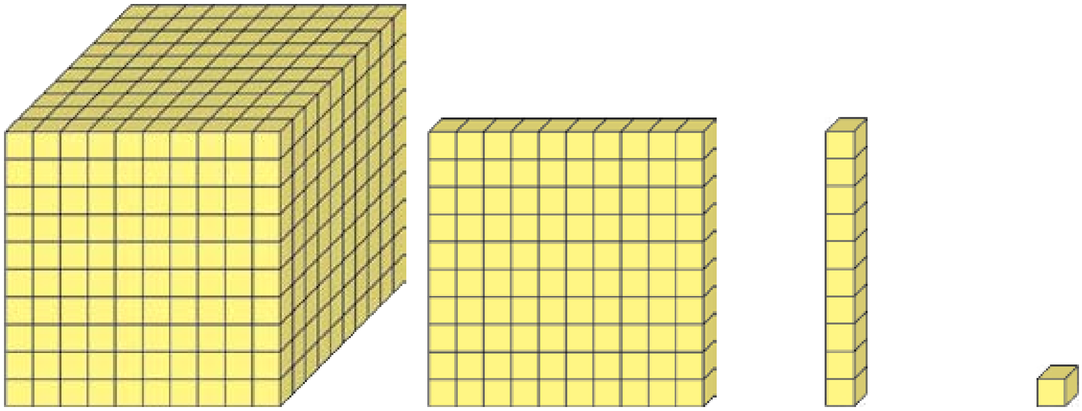
crédito

O material dourado, o ábaco e o quadro valor lugar (QVL), são recursos que podem ser utilizados, para o ensino dos algoritmos tradicionais.

O QVL já é conhecido e foi explorado no Caderno anterior. O ábaco é considerado, historicamente, como o precursor da calculadora e conhecido como a primeira máquina de calcular construída pelo homem. Há diferentes modelos de ábaco, todos eles com o mesmo princípio constitutivo do SND que permite o trabalho centrado no valor posicional do número. Por razões didáticas, para o ciclo de alfabetização, sugerimos atividades com o ábaco aberto e apenas até a ordem das unidades de milhar. Isto porque, a idéia é que depois disso, o algoritmo já esteja consolidado, não sendo mais necessário o uso de materiais manipuláveis.



O material dourado é formado por cubinhos, barras, placas e cubo, em que uma barra é formada por 10 cubinhos, uma placa é formada por 10 barras e um cubo é formado por 10 placas. A principal contribuição desse consiste na possibilidade de explorar propriedades do SND, tais como: a base 10, a composição aditiva e multiplicativa, explorar trocas e composição/decomposição de números em unidades, dezenas e centenas. É importante salientar que o valor posicional do número não é tratado de forma explicita neste recurso como o é no QVL e no ábaco.



cubo

1 milhar ou
10 centenas ou
100 dezenas ou
1000 unidades

placa

1 centena ou
10 dezenas ou
100 unidades

barra

1 dezenas ou
10 unidades

cubinho

1 unidade

Vejamos alguns exemplos de como podemos trabalhar os algoritmos tradicionais com o material dourado e com o ábaco, tendo como base o trabalho sugerido com agrupamentos em base dez e o Quadro Valor de Lugar no Caderno anterior a este.

Inicialmente sugerimos que as crianças joguem o Jogo "Nunca Dez" (link: O Jogo "Nunca Dez" está descrito no manual de Jogos) utilizando as peças do Material Dourado. Deste modo, se familiarizarão com as trocas e destrocas possíveis:

- 10 cubinhos por 1 barra (dez unidades por uma dezena); 10 barras por 1 placa (dez dezenas por uma centena);
- 1 placa por 10 barras (uma centena por dez dezenas); 1 barra por 10 cubinhos (uma dezena por dez unidades);

Também sugerimos que realizem o mesmo jogo com o Ábaco. Nesse caso, as trocas e destrocas assumirão características diferentes, uma vez que unidades, dezenas e centenas são determinadas pela posição que ocupam no ábaco:

- 10 argolas na casa das unidades por 1 argola na casa das dezenas; 10 argolas na casa das dezenas por 1 argola na casa das centenas;
- 1 argola na casa das centenas por 10 argolas na casa das dezenas; 1 argola na casa das dezenas por 10 na casa das unidades.

É importante que os alunos representem diferentes números no ábaco antes de iniciar o trabalho com cálculos para que o processo se torne mais ágil. Isto porque a tendência inicial é que ao representar 25 unidades no ábaco, por exemplo, o façam colocando 25 unidades na casa das unidades. Em alguns ábacos, a impossibilidade de que as 25 argolas caibam no pino correspondente à casa das unidades gera a necessidade de o aluno encontrar uma alternativa para solucionar o impasse. É importante neste momento, que o professor desafie os alunos a representar diretamente no ábaco as 2 dezenas que compõem o número colocando diretamente 2 argolas na casa das dezenas e 5 argolas na casa das unidades. Para isso pode retomar o processo do jogo "Nunca Dez", discutindo as diferentes possibilidades de trocas.

Adição sem agrupamento ou reserva

A adição sem agrupamento é aquela que não exige o "vai um"[2], como na adição abaixo:

$$\begin{array}{r} 24 \\ +\ 15 \\ \hline \end{array}$$

A adição não envolve agrupamento. Para realizar $\boxed{24 + 15 =}$ inicialmente as crianças podem separar 24 cubinhos e 15 cubinhos, juntá-los e contar todos, verificando a soma, tendo a contagem simples como apoio, conforme estratégias já discutidas sobre a resolução de problemas aditivos. Esta ação é bastante comum no início do trabalho com material dourado ou ábaco. Nesse caso, o trabalho do professor consiste em desafiar a criança a pensar em 24 como 2 grupos de dez mais 4 unidades e em 15 como 1 grupo de dez mais 5 unidades. Isto pode ser feito pelo desafio às trocas ou à representação direta do número com o material dourado: 24 cubinhos podem ser trocados por 2 barras e 4 cubinhos. Já 15 pode ser trocado por 1 barra e 5 cubinhos.

crédito

imagem baixa

Conforme o algoritmo tradicional da adição, iniciamos pela casa das unidades, somando os valores correspondentes. Com o apoio do material dourado, juntamos os 4 cubinhos (unidades) correspondentes à primeira parcela e os 5 cubinhos (unidades) correspondentes à segunda, obtendo 9 cubinhos. Representamos este valor no algoritmo colocando o algarismo 9 na casa das unidades.

D	U
2	4
+ 1	5
	9

crédito

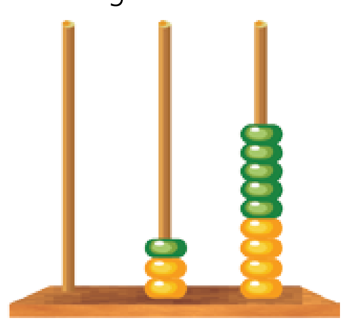
[2] De fato, nunca "vai um". Como veremos mais adiante "vai uma dezena", "vai uma centena", "vai um milhar" e assim por diante.

No caso, não houve necessidade de fazer trocas de unidades por dezenas, pois não formou uma dezena. A seguir juntamos 2 barras (dezenas) correspondentes à primeira parcela e 1 barra (dezena) correspondente à segunda parcela, obtendo 3 barras (dezenas). Representamos este valor com o algarismo 3 na casa das dezenas.

D	U
2	4
+ 1	5
3	9

Com o apoio do ábaco, o cálculo é realizado da seguinte forma: representamos o 24 no ábaco, colocando 2 argolas na casa das dezenas e 4 argolas na casa das unidades. No quadro ou em um papel registramos esses valores no formato da conta tradicional, identificando unidades e dezenas.

A seguir acrescentamos no mesmo ábaco, 1 argola na casa das dezenas e 5 argolas na casa das unidades, uma vez que se trata de uma ação de juntar. Registramos na conta, cada quantidade de argolas nas respectivas casas. A seguir, contamos quantas argolas há na casa das unidades (9) e registramos na conta e quantas argolas há na casa das dezenas e registramos na conta (3), concluindo que a soma é 39.



D	U
2	4
+ 1	5
3	9

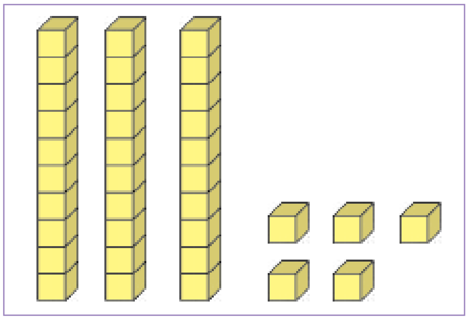
Subtração sem desagrupamento

Trata-se de uma subtração em que não requer desagrupar[3] um número em uma ordem superior e colocá-lo em na ordem imediatamente inferior, por exemplo, trocar uma dezena por 10 unidades para realizar o cálculo. Abaixo uma subtração sem desagrupamento:

$$\begin{array}{r} 2\ 4 \\ -\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$$

[3] É comum dizer "pegar emprestado" para sinalizar o desagrupamento. No entanto, esta expressão é inadequada, pois, de fato, o que houve foi um desagrupamento. Não houve empréstimo, porque não haverá devolução. A expressão "pegar emprestado" tem origem em um antigo algoritmo em que se adicionava 10 unidades a um dos termos (minuendo) e 1 dezena ao outro termo da subtração (subtraendo), não alterando a diferença.

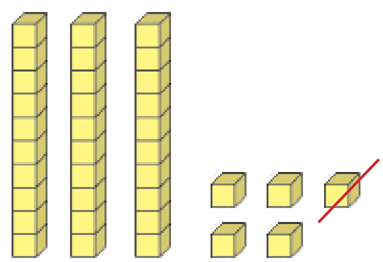
Para resolvê-la com o auxílio do material dourado, inicialmente, buscamos as peças que representam o 35, ou seja, 3 barras (dezenas) e 5 cubinhos (unidades).



Novamente, lembramos que no início a criança poderá pegar 35 cubinhos, sendo necessário desafiar as crianças a realizar as trocas das unidades pelas dezenas, uma vez que em 35 temos 10 + 10 + 10 + 5, ou seja, 3 dezenas e 5 unidades.

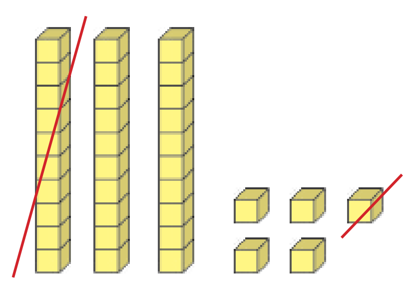
Dos 35 estão sendo subtraídos 11. Como iniciamos o cálculo da subtração pela casa das unidades, retiramos então 5 cubinhos (unidades) e representamos o valor obtido na conta: tínhamos 5 cubinhos (unidades), subtraímos 1 cubinho (unidades) ficando com 4 cubinhos, ou seja, 4 unidades na casa das unidades.

D	U
3	5
– 1	1
	4

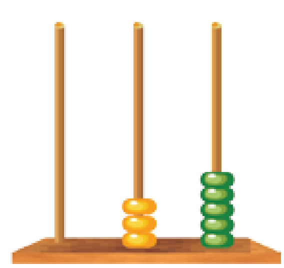


A seguir subtraímos as dezenas. Então, retiramos 1 barra das 3 que tínhamos, inicialmente ficando com 2. Representamos o valor obtido na conta: tínhamos 3 dezenas, subtraímos 1, ficando com 2 dezenas.

D	U
3	5
– 1	1
2	**4**

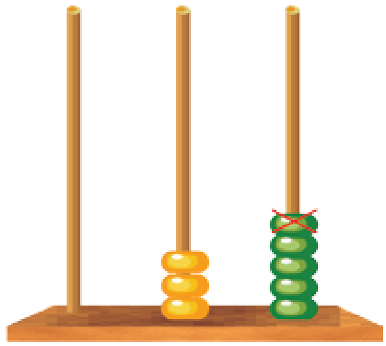


Com o ábaco é possível fazer esse cálculo do seguinte modo: inicialmente colocamos no ábaco o número de argolas correspondentes às unidades e dezenas de 35, ou seja, 3 dezenas e 5 unidades representando-as nos lugares correspondentes na conta.



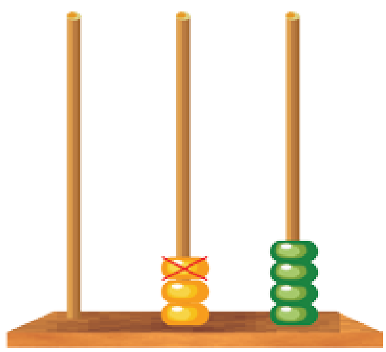
D	U
3	5

A seguir, retiramos do ábaco, iniciando pela casa das unidades, 1 argola da casa das unidades, ou seja, 1 unidade, registrando a ação realizada na conta:



	D	U
	3	5
–	1	1
		4

Posteriormente, retiramos 1 argola da casa das dezenas, ou seja, 1 dezena, registrando a ação realizada na conta, concluindo que o resultado é 24.



	D	U
	3	5
–	1	1
	2	4

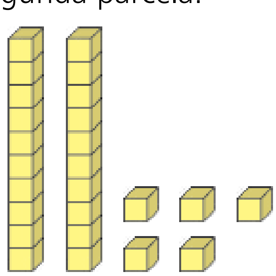
Adição com agrupamento ou reserva

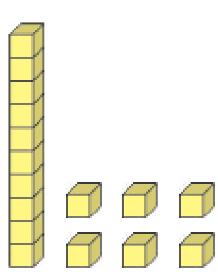
Nesse caso temos um cálculo de adição com reserva, como a seguir:

$$\begin{array}{r} 2\ 5 \\ +\ \ 1\ 6 \\ \hline \end{array}$$

Inicialmente, com o material dourado, separamos as peças equivalentes à primeira parcela, ou seja, 2 barras e 5 cubinhos, isto é, 2 dezenas e 5 unidades.

A seguir separamos as peças equivalentes à segunda parcela: 1 barra (1 dezena) e 6 cubinhos (6 unidades), juntando-as às separadas anteriormente. Acrescentamos a segunda parcela:

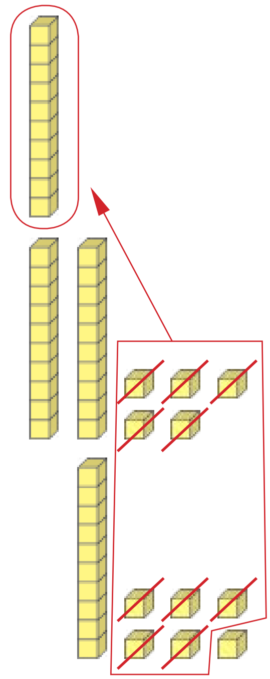




	D	U
	2	5
+	1	6

Verificamos que ao todo temos 11 cubinhos, o que equivale a 10 + 1, ou seja, 1 dezena mais 1 unidade.

Como operamos em um sistema de numeração de base dez, temos que trocar 10 cubinhos por 1 barra, ou seja, 10 unidades por 1 dezena, restando, após a troca, 1 cubinho que equivale a 1 unidade. Aqui temos o que conhecemos como o "vai um", ou seja, "vai uma" dezena para a casa das dezenas, uma vez que fizemos a troca de 10 unidades por 1 dezena.



Como representamos esse movimento na conta?

A compreensão do valor posicional do número é muito importante neste momento, ou seja, a compreensão de que o algarismo 1 na "casa" das dezenas tem um valor equivalente a dez unidades.

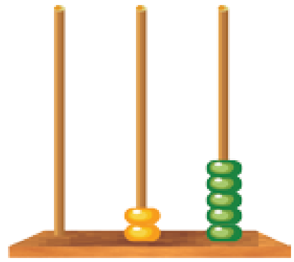
Se não fosse o movimento do "vai" uma dezena para a casa da dezena, teríamos a seguinte configuração no cálculo, o que não estaria de acordo com o algoritmo:

D	U	
2	5	
+ 1	6	
	11	→ 10 + 1 = 1d + 1u

Portanto, a representação fica da seguinte forma:

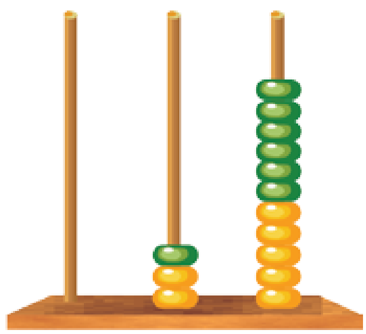
D	U
$^{1}2$	5
+ 1	6
4	1

Com o ábaco, inicialmente representamos a primeira parcela do cálculo (25) colocando 2 argolas na casa das dezenas e 5 argolas na casa das unidades. Representamos este valor na conta.



D	U
2	5

A seguir, juntamos a segunda parcela: 1 argola na casa das dezenas e 6 na casa das unidades, representando o acréscimo na conta.



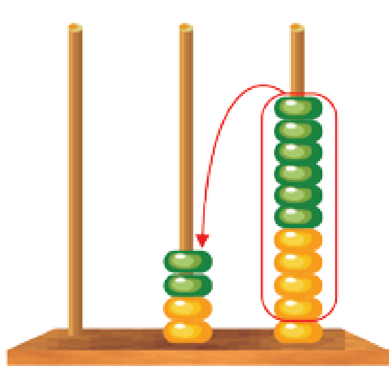
	D	U
	2	5
+	1	6

Contando a quantidade de argolas da casa das unidades verificamos que obtemos 11.

	D	U
	2	5
+	1	6
		11

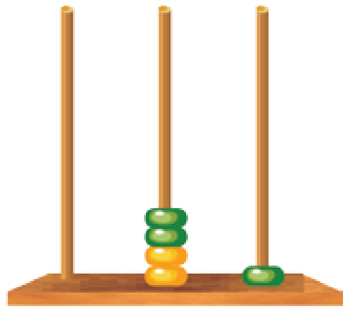
11 → 10 + 1 = 1d + 1u

Então, como 11 = 10 + 1, ou seja, 1 dezena + 1 unidade, temos que proceder a troca de 10 argolas que estão na casa das unidades por 1 argola na casa das dezenas.



	D	U
	$^{1}2$	5
+	1	6
		1

Finalmente, contamos as argolas na casa das dezenas obtendo 4 dezenas. Representamos esse valor na conta, finalizando o cálculo.



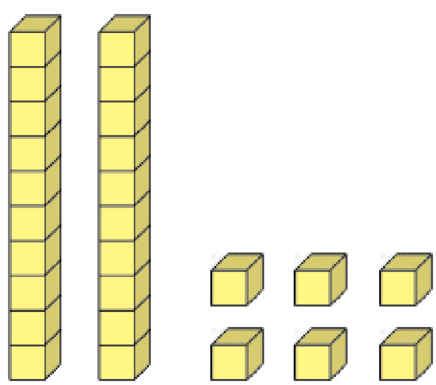
	D	U
	$^{1}2$	5
+	1	6
	4	1

Subtração com desagrupamento

Trata-se de contas de subtração em que necessitamos fazer trocas entre dezenas por unidades ou centenas por dezenas, milhares por centenas e assim sucessivamente para realizarmos a conta. Exemplo de troca de dezena por unidades:

$$\begin{array}{r} 26 \\ -\ 18 \\ \hline \end{array}$$

Inicialmente pegamos 2 barras (dezenas) e 6 cubinhos (unidades) do material dourado.

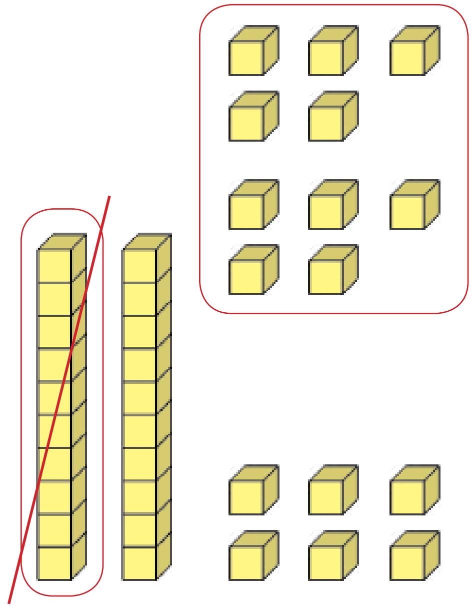


D	U
2	6

Precisamos subtrair de 26, 1 barra (dezena) e 8 cubinhos (unidades).

	D	U
	2	6
–	1	**8**

Conforme o algoritmo, iniciamos a subtração pela casa das unidades, então, devemos subtrair 8 cubinhos. De imediato é possível perceber que para fazê-lo, precisamos de uma estratégia, uma vez que temos, somente, 6 cubinhos. Tal estratégia consiste em trocar dezenas por unidades. Trocamos, então, 1 barra (1 dezena) por 10 cubinhos (unidades), ficando com 1 barra e 16 cubinhos.



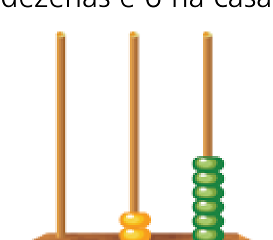
Como representar este movimento na conta?

D	U
$\cancel{2}^1$	16
– 1	8

Finalizamos o cálculo subtraindo 8 cubinhos dos 16 e 1 barra daquela que restou da troca. No cálculo, isto equivale a subtrair 8 unidades da casa das unidades e 1 dezena da casa das dezenas. O resultado do cálculo é 8 unidades.

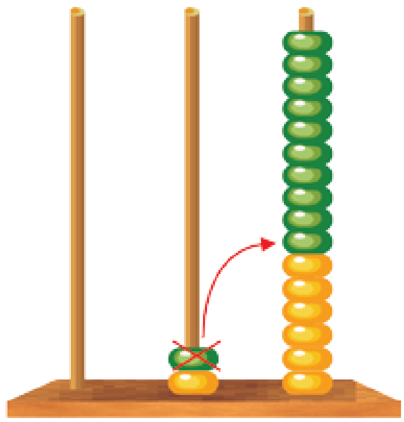
D	U
$\cancel{2}^1$	16
– 1	8
0	8

No ábaco, inicialmente, representamos a quantidade inicial 26, colocando 2 argolas na casa das dezenas e 6 na casa das unidades.



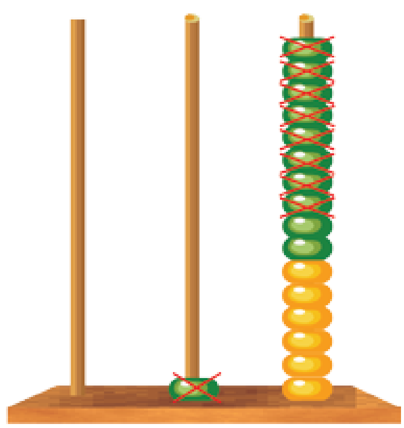
D	U
2	6

A seguir, começamos o cálculo pela casa das unidades. Precisamos subtrair 8 argolas das unidades, mas temos 6. Trocamos, então, uma argola da casa das dezenas por 10 argolas, colocando-as na casa das unidades, uma vez que 1 dezena equivale a dez unidades. Ficamos então com 16 argolas na casa das unidades, o que nos permite subtrair 8.



D	U
$1^{\cancel{2}}$	$10 + 6$

Iniciando a subtração pela casa das unidades, de 16 subtraímos 8 e ficamos com 8 unidades. Após, subtraímos 1 dezena da casa das dezenas, não restando, portanto, nenhuma dezena.



D	U
$1^{\cancel{2}}$	16
$-\ 1$	8
0	8

CONCLUINDO

Neste caderno tratamos de vários conceitos referentes a Resolução de Problemas e as operações. Certamente são muitas informações para dominarmos prontamente. No entanto, na rotina de sala de aula, ao abrirmos um livro didático, atual e aprovado pelo PNLD, por exemplo, observaremos que todos estes conceitos estão ali presentes. Ter consciência deste fato é muito importante para alterar a prática tradicional, evitando a repetição de resoluções de um grande número de problemas sempre do mesmo tipo.

Retomando este e os outros textos presentes nos Cadernos de Formação do PACTO e livros que tratam sobre o mesmo tema, aos poucos iremos nos apropriar-do destes conceitos que certamente farão grande diferença na prática pedagógica, auxiliando as crianças para que se alfabetizem até o fim do primeiro ciclo de alfabetização.

REFERÊNCIAS

AGRANIONIH, Neila Tonin; SMANIOTTO, Magáli. **Jogos e aprendizagem matemática**: uma interação possível. Erechim: EdiFAPES, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria da Educação Básica. **Elementos Conceituais e Metodológicos para Definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º, e 3º anos) do Ensino Fundamental**. Brasília, 2012. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=18543&Itemid=1098>. Acesso em: 20 ago. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CARRAHER,T.N. CARRAHER, D. E SCHLIEMANN, A. L. Na vida dez na escola zero. São Paulo: Cortez: 1988.

CORREA, J. ; SPINILLO, A. G. O desenvolvimento do raciocínio multiplicativo em crianças. In: PAVANELLO, R. (Org.) **Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental**: a pesquisa e a sala de aula. São Paulo: SBEM, 2004. (Biblioteca do Educador Matemático. Coleção SBEM, v. 2)

FAYOL, Michel. **A criança e o número**: da contagem à resolução de problemas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GUÉRIOS, E.; LIGESKI, A. **Resolução de problema em Matemática**: problema em matemática ou em Linguagem? In: Congresso Iberoamericano de Educação Matemática,VI, Montevideo, 2013. Disponível em: <www.cibem.org/paginas/img/resumenes.pdf>. Acesso em: 23 out. 2013.

GUÉRIOS, E.; ZIMER, T. T. B. et al. **A avaliação em matemática nas séries iniciais**. Curitiba, Editora da UFPR, 2005.

KAMII, C.; DeCLARK, G. **Reinventando a aritmética**: implicações da teoria de Piaget. Campinas, SP: Papirus, 1986.

KAMII, C.; JOSEPH, L. L. **Crianças pequenas continuam reinventando a aritmética**. Séries iniciais. Implicações da Teoria de Piaget. 2.ed. Porto Alegre: Artmed, 2005.

KAMII, C.; LIVINGSTON, S. J. **Desvendando a Aritmética**: implicações da Teoria de Piaget. São Paulo: Papirus, 1995.

LERNER,D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA, C.; SAIZ, C. (Org.). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

MAGINA, S. CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T.; CITIRANA, V. **Repensando adição e subtração**: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2001.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; BRYANT, P. **Educação matemática 1**: números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

ORRANTIA, Josetxu. **Las dificuldades en el aprendizaje del cálculo desde el punto de vista cognitivo**. <File://A:\ Orrantia.htm>. Acesso em 30 ago 2004.

PARRA, C. Cálculo mental na escola primária. In: PARRA, C.; SAIZ, C. (Org.). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PIRES, C.M. **Números naturais e operações**. Melhoramentos, 2013.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1970.

PONTE, J.P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**. Formação de professores e aplicações na sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**. Curitiba: Editora UFPR, 2009.

Compartilhando

Atividade 1

Reflita sobre o depoimento da professora Alessandra Nacur Gauliki e escreva os pontos que mais lhe interessaram e que você gostaria de compartilhar com seus colegas.

1.1) Cite um exemplo de sua prática pedagógica com atividades pertinentes ao Campo conceitual aditivo em que você proporcionou ao seu aluno a possibilidade de resolver uma situação desafiadora. Explique de que modo você conduziu esta prática.

1.2) Faça o mesmo com uma atividade pertinente ao campo conceitual multiplicativo.

1.3) A Professora Alessandra afirma que "Trabalhar com a matemática engloba, antes de tudo, proporcionar ao estudante a possibilidade de resolver situações desafiadoras e utilizar estratégias e mecanismos que favoreçam essas ações". O que é, para você, uma situação desafiadora a ser vivenciada quando está ensinando Matemática? Cite exemplos de situações desafiadoras vivenciadas por você em atividades com Resoluções de Problemas.

1.4) Descreva 2 situações vividas em que seus alunos do Ciclo de Alfabetização tiveram dificuldades em resolver problemas propostos por você. Compartilhe as situações que descreveu com seus colegas professores e observe coincidências e diferenças entre as dificuldades compartilhadas.

Atividade 2

Você aprendeu que os conceitos de adição e subtração fazem parte do campo conceitual aditivo e que os conceitos de multiplicação e divisão fazem parte do campo conceitual multiplicativo. Também, que cada um desses campos conceituais envolve e é envolvido por diferentes situações e formas de representação.

2.1) Escreva com suas próprias palavras o que você aprendeu sobre os campos conceituais aditivo e multiplicativo.

2.2) Escreva sobre a importância desse conhecimento para a prática pedagógica dos professores em Matemática.

2.2) Em grupo, socialize o que cada um escreveu por meio de leituras e discuta a escrita de cada um.

2.3) Em grupo, elabore um único texto que retrate o entendimento do grupo.

2.4) Cada grupo deve ler seu texto para todos os demais grupos.

2.5) O conteúdo dos textos deve ser discutido, à luz do referencial teórico, até que não haja mais dúvidas.

Atividade 3

Crie uma situação-problema cuja solução pertença ao campo conceitual aditivo. Escreva um problema decorrente dessa situação.

3.1) Descreva seu objetivo de aprendizagem para o problema que escreveu.

3.2) Explique as características do problema elaborado, tendo em vista o que foi estudado sobre o campo aditivo.

3.3) Elenque possíveis estratégias de resolução que seus alunos utilizariam.

3.4) Desenvolva cada uma dessas estratégias utilizando: representação pictórica, material dourado, palitos e outros objetos próprios para cálculos referentes ao campo aditivo.

Atividade 4

Elaboração de um álbum de problemas.

Os objetivos dessa atividade são aprender a elaborar problemas dos campos aditivo e multiplicativo e, ao mesmo tempo, organizar um álbum de problemas que possa ajudar os professores na elaboração da atividade didática cotidiana com Resolução de Problemas.

4.1) Cada dupla deve elaborar um problema para cada situação do campo conceitual aditivo.

4.2) Cada dupla deve elaborar um problema para cada situação referente ao campo conceitual multiplicativo.

4.3) As duplas devem trocar os problemas elaborados entre si, analisar cada enunciado elaborado pelo outro grupo verificando se atendem às características para as quais foram elaborados e resolvê-los.

4.4) As análises devem ser socializadas com o grupo elaborador. Em caso de discordância, os grupos (que elaborou e que analisou) devem chegar a um consenso sobre a natureza do problema e sobre a solução.

4.5) Após, todos os problemas elaborados e consensuados devem ser organizados em um álbum, conforme as características.

Caso haja limitação de tempo para desenvolvimento da atividade, a turma de professores cursistas pode ser organizada em grupos e cada grupo pode elaborar problemas para uma das situações dos campos conceituais.

Uma variação dessa atividade pode ser a elaboração de um painel que contenha um problema de cada situação, escolhidos pelos grupos. Nesse caso, define-se a dinâmica para elaboração dos problemas e, após, os professores decidem quais serão os problemas elaborados que farão parte do painel. Os critérios para a decisão devem ser, prioritariamente, rigor teórico (se o enunciado pertence às situações anunciadas), criatividade e possibilidade de resolução.

Uma ideia de organização do painel pode ser:

Campo Conceitual Aditivo	Composição simples	Enunciado
	Transformação simples	Enunciado
	Composição com uma das partes desconhecida	Enunciado
	Transformação com transformação desconhecida	Enunciado
	Transformação com início desconhecido	Enunciado
	Comparação	Enunciado
Campo Conceitual Multiplicativo	Comparação entre razões	Enunciado
	Divisão por formação de grupos	Enunciado
	Divisão por distribuição	Enunciado
	Configuração retangular	Enunciado
	Raciocínio combinatório	Enunciado

Atividade 5

Selecione um problema desenvolvido por você em sua sala de aula e o escreva. A seguir:

5.1) relate a estratégia metodológica adotada por você para provocar a situação (jogo, brincadeira, literatura, etc.).

5.2) relate os problemas desenvolvidos a partir da atividade metodológica.

5.3) relate as estratégias de resolução desenvolvidas pelos alunos. Considere as diferentes estratégias realizadas pelo mesmo aluno e por diferentes alunos para o mesmo problema. Todas elas devem ser consideradas: cálculo mental, pictórica, escrita, algorítmica, etc.

5.4) analise as estratégias, identifique e descreva o pensamento desenvolvido pelos alunos para a solução.

Atividade 6

Você leu que:

> *[...] enfatizar o raciocínio não significa deixar de lado o cálculo na resolução de problemas: significa calcular compreendendo as propriedades das estruturas aditivas e das operações de adição e subtração.* (Nunes, Campos, Magina e Bryant, 2001, p. 56).
>
> [...] para o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo é importante propor aos alunos problemas variados, envolvendo as várias situações que compõem os campos conceituais. Com isso estaremos oferecendo situações desafiadoras às crianças e evitando que resolvam problemas a partir da repetição de estratégias já conhecidas.

Lembre-se das suas aulas e procure uma situação em que você almejou a realização de cálculo com objetivo apenas algorítmico e de cálculo com objetivo de compreensão conceitual. Com os conhecimentos adquiridos nesta formação, você modificaria as atividades relatadas? Em que as modificaria? No caso de não modificá-las, justifique por que as manteria como realizou.

Atividade 7

A Professora Denise Ballão que atua no 1º ano na Escola Municipal Umuarama, no município de Curitiba, Estado do Paraná, contou sobre sua prática pedagógica. Em determinado trecho de depoimento afirma o seguinte:

> *Normalmente situações-problema são oferecidas e contextualizadas ao cotidiano dos estudantes. Em determinados momentos, jogos (quebra-cabeça, tangram, memória, dominó), que facilitam o aprendizado e despertam o raciocínio também são usados, bem como outros materiais manipuláveis (blocos lógicos, palitos, tampinhas, figurinhas, etc.) que favoreçam o desenvolvimento matemático, propiciando à criança oportunidades de experimentar, descobrir, manipular objetos com o registro das situações que estão sendo apresentadas.*
>
> *Desenvolvo exercícios avaliativos registrados em folhas, cadernos, livros. No ambiente de aprendizagem alguns acabam tendo mais facilidade para compreender e outros apresentam mais dificuldades e necessitam de apoio. Quem pode auxiliar? Somente a professora? Não! Os estudantes se organizam e são estimulados a ajudar àqueles que mais necessitam. O ambiente é de interação. Claro que em alguns casos existe a necessidade da intervenção individual da professora ou da corregente para facilitar a compreensão e possibilitar o sucesso do aluno. Por isso, de maneira geral, os estudantes são estimulados a interagirem uns com os outros.*

Certamente, assim como a professora Denise, você já utilizou jogos em sua prática pedagógica. Nesse caderno também apresentamos sugestões de como trabalhar com jogos no ensino de matemática no Ciclo de Alfabetização.

Sua atividade é selecionar, ou elaborar, um jogo que possibilite explorar situações do campo conceitual aditivo ou multiplicativo e elaborar 5 problemas. Adote o seguinte roteiro:

a) Descreva o jogo.

b) Escreva as regras do jogo.

c) Escreva cada problema.

d) Explique a que campo conceitual o problema pertence.

e) Resolva cada problema com pelo menos duas estratégias de resolução.

Para saber mais

Depois de terem refletido a respeito dos temas abordados nessa unidade, de terem conhecido exemplos de como professoras planejam, organizam e desenvolvem atividades que promovem a aprendizagem Matemática no ciclo da alfabetização, convidamos vocês a profundarem seus conhecimentos e a conhecerem outras experiências, fazendo leituras complementares.

Sugestões de leituras

NUNES, Terezinha ; CAMPOS, Tânia M. M. ; MAGINA, Sandra Maria Pinto ; BRYANT, Peter. **Educação Matemática**: números e operações numéricas. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2005. v. 1. 206 p.

Este livro é escrito com a concepção de que todo ensino é baseado em evidências. O professor é aquele que coleta informações sobre os processos de aprendizagem de seus alunos, buscando propor atividades adequadas ao desenvolvimento dos conceitos. Os autores apresentam sugestões de atividades ao longo da discussão teórica sobre a temática abordada no livro, tratando de: Educação Matemática e o desenvolvimento da criança; as estruturas aditivas e multiplicativas, razão e proporção e quantidades extensivas e intensivas.

Sugestões de atividades para os encontros em grupos

1º momento (4 horas)

1. Ler texto para deleite: **Os Filhotes do Vovô Coruja** de Ivo Minkovicius.
2. Retomada do Encontro Anterior.
3. Ler a seção "Iniciando a Conversa".
4. Fazer as Atividade 1 e 2 da seção "Compartilhando".

2º Momento (4 horas)

1. Ler texto para deleite: **Quem ganhou o jogo? Explorando a adição e subtração** de Ricardo Dreguer.
2. Fazer as atividades 3, 4, 5 da seção "Compartilhando".

3º Momento (4 horas)

1. Ler texto para deleite: **Histórias de contar** de Ana Paula Perovano.
2. Fazer as atividades 6 e 7 da seção "Compartilhando".
3. Preparar uma ficha com cálculos a serem resolvidos pelas crianças para cada turma (ver atividades de casa e escola). Descreva os erros mais comuns que vocês acreditam que eles cometeriam e discutam estratégias para ajudá-los a superá-los.
4. Utilizando os materiais já elaborados nos outros encontros elaborem uma ficha de atividades envolvendo situações-problema referentes aos campos aditivo e multiplicativo a serem resolvidos pelas crianças (ver atividades de casa e escola). Descreva os erros mais comuns que vocês acreditam que eles cometeriam e discutam estratégias para ajudá-los a superá-los.

Atividades para casa e escola

1. Entregue a ficha de cálculos para os alunos resolverem. Deixe disponível todo material didático possível. Recolha as resoluções, analise-as observando as estratégias realizadas e compare com o que descreveu junto com seu grupo. Identifique e classifique os erros encontrados. Procure se utilizar das estratégias que elaboraram para auxiliar os alunos na superação das dificuldades.
2. Entregue a ficha de problemas para os alunos resolverem. Deixe disponível todo material didático possível. Recolha as resoluções dos alunos. Analise as resoluções observando as estratégias que os alunos realizaram e compare com o que descreveu junto com seu grupo. Identifique e classifique os erros encontrados. Procure se utilizar das estratégias que elaboraram para auxiliar os alunos na superação das dificuldades.
3. Crie um problema cuja solução pertença ao campo conceitual multiplicativo. Escreva um problema decorrente dessa situação. Descreva seu objetivo de aprendizagem para o problema que escreveu. Explique as características do problema elaborado referente ao campo multiplicativo. Elenque possíveis estratégias de resolução elaboradas pelos alunos. Desenvolva cada uma dessas estratégias utilizando: representação pictórica, material dourado, palitos e outros objetos próprios para cálculos referentes ao campo multiplicativo.
4. Leia as regras do jogo "Contas e mais contas" e jogue com alguém para conhecer a dinâmica e as possibilidades do jogo. A seguir:
   a) Elabore atividades problematizadoras para serem trabalhadas com seus alunos, em sua sala de aula, a partir do jogo "Contas e mais contas". Lembre-se de que estas atividades permitem explorar estratégias lógicas e cálculos envolvidos nas jogadas;
   b) Jogue com os seus alunos e proponha a eles a realização das atividades elaboradas por você;
   c) Analise e discuta com seus colegas de curso as resoluções por eles apresentadas.

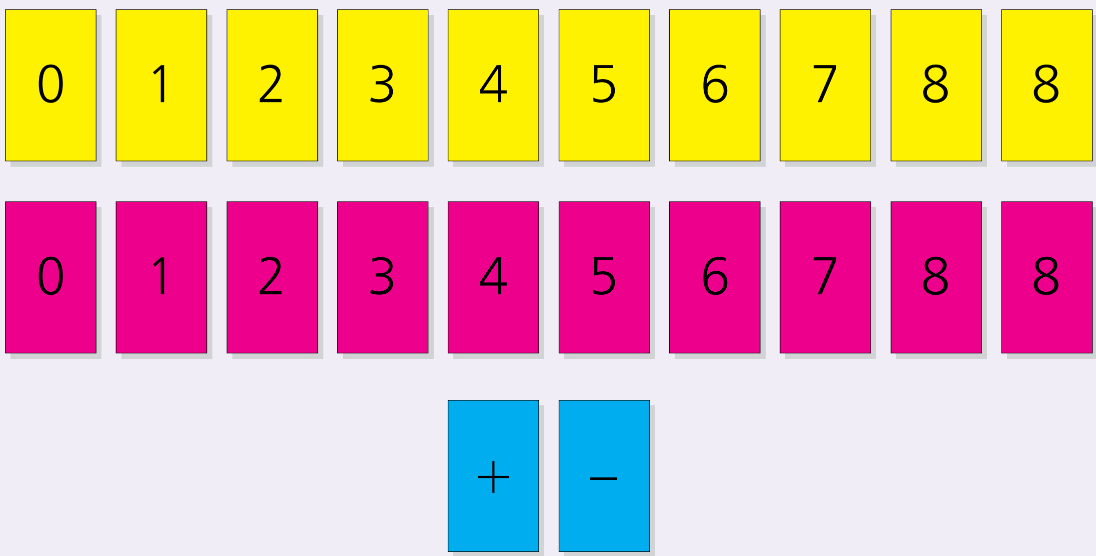
Contas e Mais Contas

Materiais:

- 50 cartões numerados de zero a nove, sendo 5 cartões de cada numeral, na cor amarelo;

- 20 cartões com o sinal da operação de adição (+) , na cor azul;
- 20 cartões com o sinal da operação de subtração (-), na cor azul;
- 20 cartões com o sinal de igualdade (=);
- 10 cartões numerados de zero a nove, na cor rosa.

Modelo dos cartões:



Número de jogadores: 2 ou 3 jogadores

Regras do jogo:

Embaralhar os cartões amarelos e rosa antes de iniciar o jogo. Distribuir para cada jogador 6 cartões amarelos. Os demais cartões amarelos ficam em um monte sobre a mesa. Os cartões rosa permanecem sobre a mesa, virados para baixo. Os cartões com os sinais da operação de adição (+) e da subtração (–) ficam à disposição dos jogadores para que escolham o que lhes for mais conveniente, a cada jogada.

O objetivo do jogo é construir cálculos com dois cartões amarelos e os cartões de sinais, cujo resultado seja o valor de sua carta da cor rosa.

Inicialmente sorteia-se um cartão rosa. Cada jogador verifica os cálculos que pode fazer com os cartões amarelos que possui na mão que resultem no valor sorteado no cartão rosa, escolhendo o cartão de sinal adequado. Os cálculos formados deverão ficar sobre a mesa. Se conseguir formar o cálculo, organiza-o ao lado da mesma, como por exemplo, saiu o cartão rosa 9, o aluno poderá então usar (se possuir) os cartões amarelos 3 e 6 com a operação +, 3 + 6 = 9.

O jogo inicia com o primeiro jogador sorteando um cartão rosa que deverá ser o resultado a ser obtido por todos na rodada. Compra um cartão amarelo. A seguir verifica seus cartões amarelos e escolhe um cartão azul com o sinal da operação que lhe permita montar um cálculo com o cartão comprado, cujo resultado seja o do cartão rosa sorteado. Se conseguir, organiza o cálculo ao lado da mesa e descarta um cartão amarelo. O próximo jogador sorteia um cartão rosa. Verifica se o cartão descartado pelo jogador anterior lhe serve. Em caso positivo, pega o cartão da mesa e procede a jogada do mesmo modo. Em caso negativo, compra um novo cartão amarelo no monte e procede a jogada.

O jogador que terminar primeiro seus cartões vence o jogo.